美国新数学丛书



几何不等式

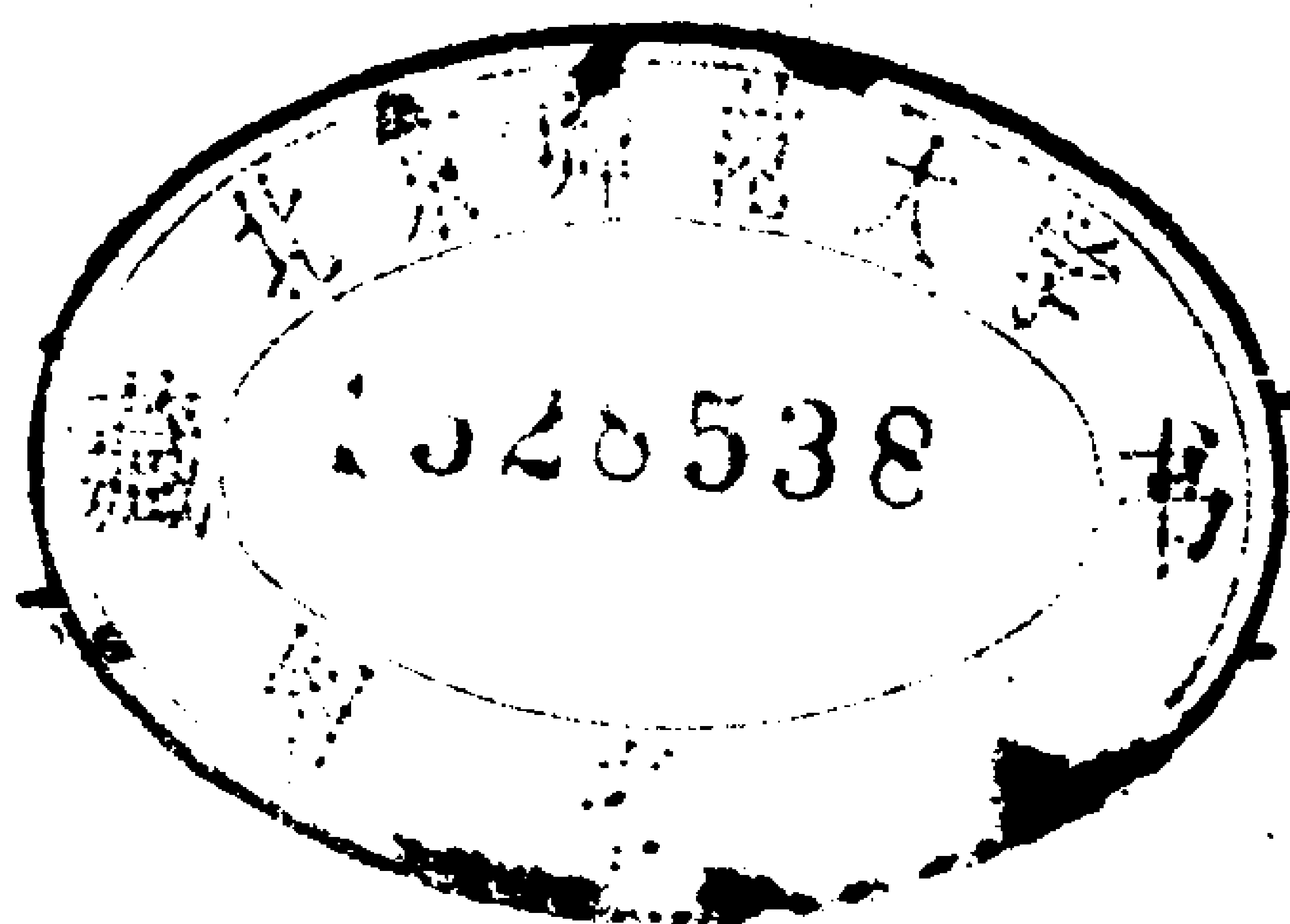
N.D. 卡扎里诺夫 著

北京大学出版社

几何不等式

N·D·卡扎里诺夫　著

刘西垣　译



北京大学出版社

几 何 不 等 式

N·D·卡扎里诺夫 著
刘 西 垣 译
责任编辑 徐信之 吴 鹏

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

787×1092毫米 32开本 4.625印张 110千字
1986年9月第一版 1986年9月第一次印刷
印数：00001—11.000册
统一书号：13209·134 定价：0.85元

内 容 提 要

本书以等周定理为中心，介绍了很多包含最大和最小的几何问题。全书的主要内容包括：算术和几何平均值，等周定理以及反射原理等。在每个章节中作者都给出了许多练习和问题，甚至包括一些还没有解决的问题，书末的第四章对精选的部分问题做了提示或解答。本书的材料大大地丰富了中学数学课程的有关内容，通过阅读本书读者可以开阔眼界，锻炼思维，还可以学到处理数学问题的一些方法。

作者的文笔生动有趣，叙述通俗易懂、深入浅出。本书适合中学生、中学数学教师以及其他对有关课题感兴趣的读者阅读，本书也可作为中学课外数学小组活动的参考资料。

Nicholas D. Kazarinoff
GEOMETRIC INEQUALITIES
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套"新数学丛书"，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，"新数学丛书"的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理学等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

"新数学丛书"首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是Anneli Lax教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012 [U.S.A.].

编辑者

作者简介

N·D·卡扎里诺夫1929年出生于美国密执安州的安纳波尔。在密执安大学，他获得了学士和硕士学位，也就是在这所大学，他的父亲唐纳特·K·卡扎里诺夫讲授数学达三十五年之久。1954年，他在威斯康星大学获得数学博士学位，现在是密执安大学数学副教授。1959—1960学年期间，他在威斯康星州麦迪逊城的美国军队数学研究中心做研究工作，1960—1961学年期间，他曾在莫斯科苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所工作。

作者学术上的兴趣在于微分方程与几何方面，特别是凸集的几何学。《几何不等式》一书是为安纳波尔的中学生举办的一个课余讨论班的成果。

纪　　念

唐纳特·康斯坦丁诺维奇

目　录

序　言

当我的父亲在世时，我常常听到他叫我："尼基，我有个问题。"而他在我们起居室黑板上出的题目多半涉及到不等式。现在，我之所以喜欢想起这些，在一定程度上是因为我在学校里从来没有碰到过与它们稍微有点相似的题目，在家里我仔细地考虑过这些题目，但是，我似乎从来没有求出过家里黑板上哪一个问题的解答。今天中学的数学课程仍然忽视不等式这个课题。可是，每个数学家都知道，在所有的数学分支中，不等式都很重要，有时甚至比等式更加重要。

1958年，安纳波尔公立学校给了我一个机会，使我能经常同一群热心的年轻人讨论数学。这些学生们的关注和兴趣，激励我写了这本书。他们对不等式的理解和欣赏也使我相信，仔细地讲解我们讨论过的某些课题，必将很好地为广大读者所接受。

几何不等式之所以特别吸引人，是由于人们能很容易地掌握它们的陈述，同时它们又是创造性的数学思想和现代数学精神的一个极好的入门。本书所讲的初等不等式还有一个优点是，为理解它们所需要的仅仅是清醒的头脑和具有最低限度的形式数学的训练（中学一年级的代数和平面几何的基础）。我偶尔用到一些三角。因此，有些材料对学习第二学期的平面几何的学生是有所裨益的。而全书应当是中学三年级和高年级学生可以接受的。

这套丛书中的另一册《不等式入门》① 为我所介绍的材料提供了另外的背景。此外，贝肯巴赫和贝尔曼的深入、活跃的研究工作也包含了与在这里展开的很多课题相类似的内容，以及一些不同的处理方法。

从历史上来看，创立微积分之前已经在研究包含最大和最小的几何问题了。微积分是一个强有力的工具，利用它人们无需独创性就能够解决一些这样的问题。然而，它也不是万灵药，任何打算学习和正在学习微积分的人将会发现，第二、三章的材料对于理解微积分能够做什么和不能做什么是有用的。

尽管人们常常忽视那种不求自来的劝告，但我还是想提出一些建议，我希望它们对读者会有所帮助。沒有一本数学书能有足够的解释和公式。因此，用心的读者必须随时使用手头的纸和笔，在画出书上所沒有的图形时，在补出论断或公式中被省略掉的步骤时，你都需要它们。常常会碰到这种情况：当你画出课文中某图形的一部分或者改写一个公式时，难点就变得易懂了。书中的练习和问题也非常重要，及时去作这些题目的读者能检验和加深自己对所学内容的理解，也为继续前进作了更好的准备。题目是按从易到难来安排的，我甚至还提到了一些未解决的问题。在第四章中对精选的题目给出了解答，我希望已经做出解答的读者会发现，把他的解答同我的答案进行比较是有帮助的。

杰奎琳·刘易丝夫人，安涅里·拉克思博士和利奥·兹平教授仔细阅读了原稿，他们的批评、建议和补充使原稿臻于完善。我特别感谢杰奎琳·刘易丝和安涅里·拉克思，他

① 不等式入门，E·贝肯巴赫，R·贝尔曼著，文丽译，北京大学出版社，1985。

们细心地核对了问题的证明和解答。

感谢安纳波尔教育部门给我机会来充实本书的内容，并向我的学生，安纳波尔中学的罗伯特·泰梯也夫致以衷心的谢意，他所给予的远甚于他所得到的。特别是，感谢父亲唐纳特·K·卡扎里诺夫对我提供的灵感和教导；他的敏锐的头脑，他的学识和他的高尚的精神引导我进入了数学的世界。

N·D·卡扎里诺夫

苏联 莫斯科

1961年1月

第一章　算术和几何平均值

1.1　基础知识

我们考虑一条直线并在它上面选定一点O．因为我们有使用尺、码尺和卷尺的经验，所以，在我们的心目中，能把线上的每一点同一个数联系起来——如果这个点在O的右方就与一个正数联系起来；如果这个点在O的左方就与一个负数联系起来；如果它是O就与零联系起来．这些数被称为实数，它们可以写成十进制小数．已经与这些数联系起来的直线被称为实线①．在图中我们通常把实线画成水平的，而且把正数放在零的右方．1，$-3/2$，$-4+\sqrt{5/3}$和π等就是一

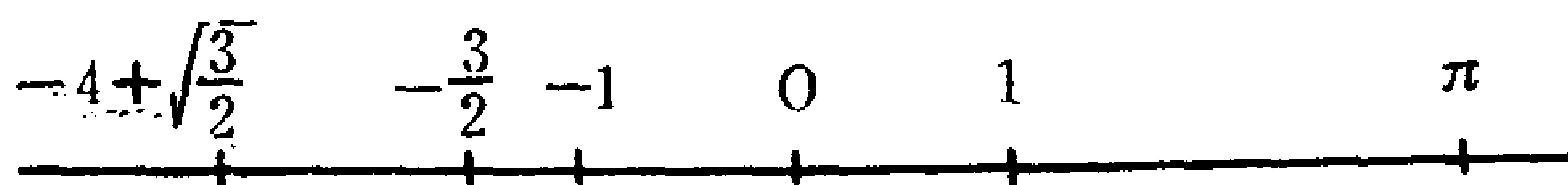


图　1.1

些熟知的实数．我们将要与之打交道的所有的数都是实数．对此，你完全可以加以反对，说我们实际上还没有定义过一个实数．这是对的．详尽地定义并讨论实数是数学分析的基础，这同样是正确的．不过，要在这里来介绍这样的讨论是过于深奥了，但是读者可以在，比如说哈代著的《纯粹数学教程》②中找到它．另一方面，在这套丛书的另一册：I·尼温所著的《数：有理数和③无理数》中给出了实数的某些

---

① 或称为实轴——译者．

② G.H.Hardy, A Course of Pure Mathematics, Cambridge University Press, 1938.

③ Ivan Niven, Numbers, Rational and Irrational.

重要性质的透彻的初等处理。

当把实数和一条直线上的点联系起来的时候(如图1.1)，我们已含蓄地断言实数系有某些性质。由于这些性质是这样的基本和重要，我要提醒大家注意它们。首先，我们理所当然地认为在全体实数的集合中有一个被称为正实数集的子集(称它为P)，并且这个集合有以下两条性质：

Ⅰ. 如果a是一个实数，则以下说法中正好有一个是对的：a在P中，$-a$在P中，a是零。

Ⅱ. 如果a和b都在P中，则$a+b$和$a\cdot b$也在P中。

因为实数系有这个子集，我们说它是*有序的*。当我们把实数与实线联系起来时，就用了这个次序性。如果a不在P中并且a又不是零，则我们就说a是负数。实数系有序是能够被证明的。此外，借助实数乘法的定义能说明：如果a和b都是负数，则ab是正数；如果a是正数而b是负数，则ab是负数。当然，两个或更多实数的乘积是零，当且仅当这些数中至少有一个是零。如果a是正数，我们写成$a>0$。

加法和乘法的代数运算在实线上有几何解释。我们常常把加法看成是对于实线的一个平移或移动。假设实线是水平的。于是，例如为了作加4的运算，我们要把实线向右滑动四个单位。为了作加实数b的运算，如果b是正数，我们就把实线向右移动b个单位；如果b是负数，就向左移动$-b$个单位。当然，如果b是零，则不移动就完成了加b的运算。乘以一个正数常常被看成拉伸或压缩运算。例如，为了乘以4，我们保持原点固定，把实线拉伸，使每点离开原点正好是原来的四倍即可。乘以-4，则先进行以4为倍数的拉伸，然后再把拉伸了的直线上的每一点关于0作反射。其中进行拉伸和反射的顺序不会产生差别。乘以1则保持所有的点不

动；乘以零就是把所有的点压缩成为一个点：原点。

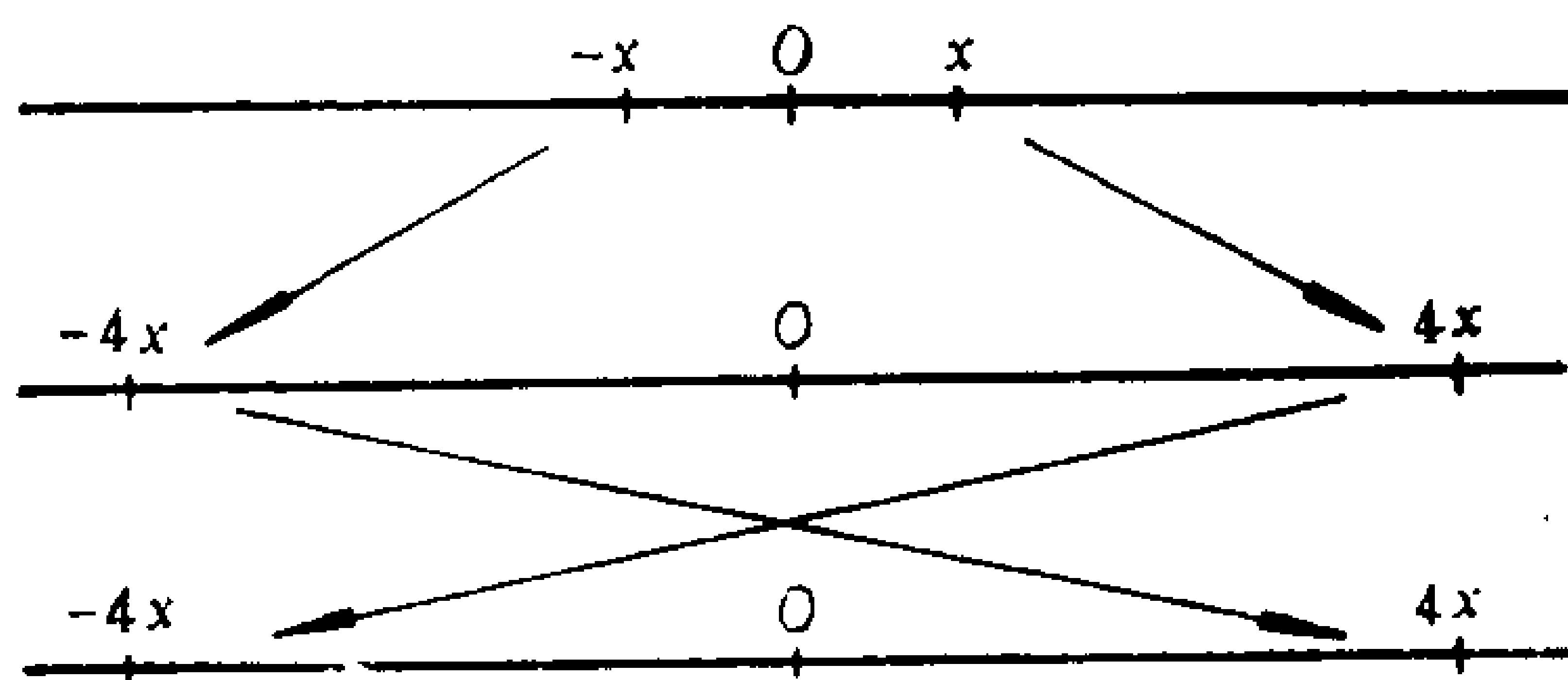


图 1.2

定义 1 当且仅当 $a-b>0$ 时，即当且仅当存在正数 h，使得 $a=b+h$ 时，$a>b$（或等价地 $b<a$）。

“$a>b$”读作“a 大于 b”；“$a<b$”读作“a 小于 b”。式子“$a<b$”被称为不等式。从几何上，我们看出 $a>b$ 的意思是在实线上 a 在 b 的右方。从上面所说的性质(1)可得：对于给定的任何一对实数 a 与 b，在 $a>b$，$a=b$ 和 $a<b$ 之中恰有一个成立。

定理 1 不等关系是传递的；若 $a>b$ 且 $b>c$，则 $a>c$。

证明 由定理的假设知，存在正数 h 和 k，使得

$$a=b+h \quad 及 \quad b=c+k.$$

因此，$\quad a=(c+k)+h \quad 或 \quad a=c+(k+h)$。

但因 h 和 k 是正数，故 $k+h$ 是正数。按照定义，这意味着 $a>c$. ▌

如果 $a<b$ 或 $a=b$ 之一成立，我们写成 $a\leqslant b$，读作“a 小于或等于 b”。例如，$1\leqslant 1$ 和 $2\leqslant 3$，因为在“$<$”或“$=$”两者当中，总有一个成立。

下一个定理告诉我们不等式可以怎样相加。

定理 2　如果$a>b$且$c\geqslant d$，则$a+c>b+d$。

其证明和定理1的证明同样容易.你应当自己作出证明.

注意，如果$a>b$且$c>d$，ac可以不大于bd。例如，$1>-2$且$2>-3$，但$2<6$。下面的定理给出了包含正数的不等式的乘法法则。

定理 3　如果$a>b>0$且$c\geqslant d>0$，则

（1）$ac>bd$；　（2）$ac>bc$；　（3）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

证明　根据假设，只要$c\neq d$就存在正数h和k，使得$a=b+h$以及$c=d+k$,在$c=d$的情形取$k=0$,等式$c=d+k$仍然成立。因此

$$ac=(b+h)(d+k)\quad 或\quad ac=bd+bk+h(d+k).$$

数$bk+h(d+k)$是正的；所以，按照定义知$ac>bd$。读者可自行完成第二个结论的证明。第三个结论可从第二个推出；因为，选取$c=1/a$，我们就推出

$$a\cdot\frac{1}{a}>b\cdot\frac{1}{a}\quad 或\quad 1>\frac{b}{a}.$$

最后，把第二个结论用于不等式$1>b/a$，这次选取$c=1/b$，我们就得到

$$1\cdot\frac{1}{b}>\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b}\quad 或\quad \frac{1}{b}>\frac{1}{a}. \quad ▌$$

在叙述下一个定理之前，我们来复习正数的分数次方幂的定义。设p是一个正有理数，a是一个正实数。（如果一个数能写成m/n的形式，其中m和n是整数，且$n\neq 0$，那么它就是有理数。）因为p是有理数又是正数，p就可写成m/n的形式，其中m和n都是正整数。符号a^m被定义成

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m\text{ 个因数}}.$$

符号 $a^{1/n}$ 代表使得 $x^n=a$ 的正实数 x。此外，

$$a^{m/n}=(a^m)^{1/n}.$$

如果 q 是负有理数，比如说 $q=-p$，其中 p 是正数，则

$$a^q=\frac{1}{a^p}.$$

当然，$a^0=1$。

在本书中，我们没有必要考虑任一数的无理次方幂。但是，为了一般起见，我们在叙述下面的定理时，并不限于 p 是有理数。当已经定义了诸如

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, \qquad \pi^\pi$$

这样的数之后，决定它们是有理数还是无理数是非常困难的问题。

定理4 如果 $a>b>0$，$p>0$，则 $a^p>b^p$；如果 $p<0$，则 $a^p<b^p$。

证明 我们将仅仅对 p 是正整数的情形证明定理，而把对任何有理数 p 的证明留给读者完成。(E·F·贝肯巴赫和 R·贝尔曼在他们的专著《不等式入门》中给出了完整的证明。) 设 p 已给定，由假设 $a>b>0$ 和定理 3 可得

$$a^2>b^2.$$

如果 p 是 2，我们已证完。否则，我们再用一次定理 3，这次是用于不等式

$$a>b>0 \quad 和 \quad a^2>b^2,$$

于是得出结论

$$a^3>b^3.$$

如果 p 是 3，我们已经做完了。否则，我们继续进行下去，总共经过正好 $p-1$ 次这样的步骤之后，就得到了要求的不等式

$$a^p>b^p. \blacksquare$$

以上定理提供了我们所需要的关于不等式运算的基本事实。往后，我们将经常不加特别引证地使用它们。不过，在着手把这些定理用到我们的研究中去之前，我们要在某些简单的情形下应用它，以便看出我们是怎样频繁地用到它们的，因而它们是多么的重要。以下算术问题的解答能够很好地阐明这一点。

问题. 在$\sqrt{7}+\sqrt{10}$与$\sqrt{3}+\sqrt{17}$中，哪一个大？

判定的办法之一是在平方根表中找出这些数来，或者简单地算出平方根到几位小数。我们将要证明$\sqrt{3}+\sqrt{17}>\sqrt{7}+\sqrt{10}$。我们的证明从平凡的观察开始，借助于定理进行推导而得到要求的结论。为了看出究竟是怎样发现解的，我们可以把论证的次序颠倒过来。在照着这个例子做练习时，你将会发现，最自然的方法就是：首先，假设要求的结论成立，再把它化归各种别的不等式，直到得出一个你知道它成立的不等式为止。其次，你必须验证每个步骤都能倒推回去。如果你成功了，你就建立了一个从已知的不等式导出要求的不等式的证明。为了说明定理1—4中的每一个的用处，我们故意选了这个有较长解答的例题。此外，由于$\sqrt{3}+\sqrt{17}$和$\sqrt{7}+\sqrt{10}$之间的差很小（大约0.05），人们不能很快挑出这两个数中的大数是不足为奇的。

解 因为$51=49+2$以及2是正数，由定义1知，$51>49$成立。把定理4（$p=1/2$）用于这个不等式，我们得出$\sqrt{51}>7$。从定理3（$a=\sqrt{51}$，$b=7$及$c=12$）推出

$$12\sqrt{51}>12\cdot 7=84.$$

在不等式两端同加213，并用定理2，我们求得

$$213+12\sqrt{51}>297.$$

但是$297>280=4\cdot70$。所以由定理1知，

$$213+12\sqrt{51}>4\cdot70.$$

其次我们注意

$$213=9+204=9+4\cdot51=9+(2\sqrt{51})^2$$

以及

$$213+12\sqrt{51}=9+2\cdot3\cdot2\sqrt{51}+(2\sqrt{51})^2$$

$$=(3+2\sqrt{51})^2.$$

因此，由定理4($p=1/2$)，我们得到结论

$$3+2\sqrt{51}>2\sqrt{70}.$$

这个不等式可改写成

$$3+17+2\sqrt{51}>17+2\sqrt{70} \quad (定理2)$$

的形式；或因$51=3\cdot17$和$70=7\cdot10$，它又可改写成

$$(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{17}+(\sqrt{17})^2$$

$$>(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{10}+(\sqrt{10})^2$$

的形式，这与

$$(\sqrt{3}+\sqrt{17})^2>(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2$$

是一样的。再利用$p=1/2$时的定理4，我们就得到了预期的结果

$$\sqrt{3}+\sqrt{17}>\sqrt{7}+\sqrt{10}. \blacksquare$$

正如我们已经注意到的，如果利用初等代数的较高深的结果，要得出同样的结论还有简短得多的方法。下面的练习给我们的基本定理提供了类似的说明。

练　　习

1．证明　$2+\sqrt{7}<5$。

2. 证明 $2+\sqrt[3]{7}<4$。

3. 证明：如果 $a<1$，则 $2-2a>0$。

4. 在 $\sqrt{5/12}+\sqrt{1/5}$ 与 $\sqrt{1/3}+\sqrt{2/7}$ 中，哪一个大？证明你的猜测。

5. 在 $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 与 $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 中，哪一个是大数？证明你的猜测。

下面给出一个稍微难懂一点的应用基本定理的模式。考虑数

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9999}}+\frac{1}{100}.$$

它有多大？我们可以发现对此难于作出一个准确的猜测。如果我们有一台计算机和足够的时间，我们是能够把这个数算得精确到两位或多位小数的。然而，不等式却能帮助我们在短得多的时间内作出一个很好的估计。由于我的目的仅仅在于使你们熟悉基本定理的应用，所以，请原谅我要保持教科书的传统，从“变一个戏法”开始；即

定理5 对每个正整数 n，有

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

证明这个结论并不难，难的是想到它！除非你已经用不等式做过一些试验，否则你是不会想到它的。试验是数学家们的典型工作。我们进行了很多很多的试验，不过我们的试验是用数、几何图形以及种种其它的抽象的对象来做的。我们的试验，和自然科学家的试验一样，几乎都是失败的，偶尔它们成功了，于是我们就发明了一个定理。接着，我们常常发现，为了给出这种由试验已经相信它是正确的猜想的

定理的严格证明，需要做的事情更多。利用显然的式子$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$做试验，人们可能发现定理5。下面的证明正好是一次成功的试验。

证明 因为$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$，

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}>\frac{2\sqrt{n}}{2}. \quad （为什么？）$$

所以，由定理3，

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1}$$

现在$1/\sqrt{n}$出现在右端。因为这是我们想要估计的量，下面就自然要消去左端分母中的平方根。我们想起恒等式

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2,$$

我们限定它为如下的形式：

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2.$$

这个恒等式的右端项显然是1。因此，用$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$乘以(1)式左端项的分子和分母，我们就求出

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}). \tag{2}$$

(1)式与(2)式一起给出

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<1/\sqrt{n}.$$

这是我们所希望证明的结论的一半。注意到$\sqrt{n}>\sqrt{n-1}$，你可以用类似的方法来证明结论的另一半。请试一试！ ▎在这个证明中我们用了哪个基本定理？

现在我们用定理5来解决所讨论的问题。我们把$n=1, 2, \cdots, 9999, 10^4$这一万个特殊情形下定理的结论都“写下来”

（在 $n=1$ 时，我们可用一个等式来代替右端的估计，因为其余9999种情形仍然包含着不等式。这样做还可使我们最终得到一个更好的估计）：

$$2\sqrt{2}-2 \quad < \quad 1 \quad \leqslant 1,$$

$$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2,$$

$$2\sqrt{4}-2\sqrt{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2},$$

……………………………………………………

$$2\sqrt{10^4}-2\sqrt{9999}<\frac{1}{\sqrt{9999}}<2\sqrt{9999}-2\sqrt{9998},$$

最后

$$2\sqrt{10001}-2\cdot 100<\frac{1}{100}<2\cdot 100-2\sqrt{9999}.$$

为了得到我们考虑的数的近似值，我们把这些不等式的对应项逐个相加，注意，在左端各项的和

$$2\sqrt{10001}-2\cdot 100+2\cdot 100-2\sqrt{9999}$$
$$+\cdots+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2$$

中除首尾两项外，其余各项都出现两次，一次带加号，一次带减号，（右端的和中同样的结论也成立）求和后，由定理 2，我们得到不等式

$$2\sqrt{10001}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{100}<2\cdot 100-1,$$

因为 $\sqrt{10001}>100$，因此我们已经证明了

$$198<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^4}}<199.$$

当然，这个估计还是粗糙的，但是它比纯粹的猜想要好得多。

如果我们采用一个适当的记号，就能把上面的论证写得更加简洁。这个记号称为**求和号**。我们定义

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

把“a_k”读作“a 下标 k”或“a　k”,把“$\sum_{k=1}^{k=n} a_k$”读作“a 下标 k 从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和”。我们称 k 是**求和的指标**。例如，

$$\sum_{k=1}^{k=4} k^2 = 1+4+9+16,$$

$$\sum_{j=2}^{j=4} \log j = \log 2 + \log 3 + \log 4,$$

$$\sum_{l=1}^{l=3} \frac{l!}{(3+l)!} = \frac{1!}{4!} + \frac{2!}{5!} + \frac{3!}{6!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120}.$$

(由定义，当 k 是正整数时，$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot k$，而$0! = 1$。例如，$1! = 1$，$2! = 2$，$3! = 6$，$4! = 24$，$5! = 120$和$6! = 720$。)
在这些例子中，求和指标的选择是清楚的，因而我们就可略掉它而简单地写成

$$\sum_{1}^{4} k^2, \quad \sum_{2}^{4} \log j, \quad \sum_{1}^{3} \frac{l!}{(3+l)!}.$$

我们估计过的数是$\sum_{1}^{10^4} 1/\sqrt{k}$。定理5表明，当 $k = 1, 2, \cdots$时，
$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < 1/\sqrt{k} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$。所以，由定理2并从$2(\sqrt{2} - 1) < 1 \leqslant 1$的事实（后一严格的不等式可从不

等式8<9利用我们的定理推出来)，我们得到

$$2(\sqrt{2}-1)+\sum_{2}^{10^4}2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$<\sum_{1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+\sum_{2}^{10^4}2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

或

$$2(\sqrt{10001}-1)<\sum_{1}^{10^4}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\cdot100-1.$$

从这个结果我们得到过最后的估计。下面在用求和号更方便时，我们将继续用它。

问题1. 对所有正整数 n，证明

$$\frac{1}{\sqrt{4n+1}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

你能改进这个近似值吗?

1.2 算术和几何平均值定理①

考虑“在所有面积为1的矩形中，正方形有最小的周长”这个猜测。显然，一个单位面积的瘦长的矩形比同样面积的短胖的矩形有更大的周长，于是自然猜想正方形有最小的周长，因为它是最胖的矩形了。我们现在有了一个可靠的猜测，但是我们怎样才能证明它呢?一种可能的做法是把它改写成代数的形式，并试图证明这个代数的提法。让我们来这样做。

假设给了一个矩形，我们选择测量单位，使它的面积是

---

① 在这套丛书中由E·贝肯巴赫和R·贝尔曼所著的《不等式入门》的第四章中，可以找到与这里所给的本定理的证明不同的几种证法。

1 个平方单位。如果它的长是 x，于是它的宽必然是$1/x$，而它的周长是$2[x+(1/x)]$。面积为 1 的正方形周长是 4 。所以，可把我们的猜测改写成以下的形式

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant 4,\quad x>0,$$

仅当 $x=1$ 时等号成立；或者

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2,\quad x>0, \qquad (3)$$

仅当 $x=1$ 时等号成立。下面的问题是寻找一种方法，把它化归一个我们已经知道其正确性的式子。要做的事情是在不等式(3)的两端同乘 x。于是它变成

$$x^2+1\geqslant 2x,\quad x>0,$$

这等价于

$$x^2-2x+1\geqslant 0,\quad x>0.$$

现在，出现在我们眼前的是完全平方公式$(x-1)^2$，我们把后一不等式改写成

$$(x-1)^2\geqslant 0,\quad x>0.$$

因为实数的平方永远不是负数，所以这个式子是显然的。

如果能把推理过程倒回去，那么我们就发现了(3)的一个证明。我们来试试这样做。由定理 2，

$$(x-1)^2\geqslant 0 \quad (\text{对任何实数 } x)$$

等价于不等式

$$x^2+1\geqslant 2x.$$

如果 $x>0$，那么我们可对这个不等式用 $c=1/x$ 的定理 3，并得出

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2,\quad x>0.$$

显然，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立。∎

在这一章中，我们的主要目的是推广(3)中所包含的简单定理。结论(3)说乘积为 1 的两个正数，当它们相等时，其和最小。如果包含了比两个更多的数，我们能够说些什么呢？不等式(3)的一个直接推广是

定理 6 乘积等于 1 的 n 个正数的和永远大于或等于 n；当且仅当所有的数都相等（等于 1）时，等号成立。即，如果 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 并且 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_n=1$，则

$$\sum_{1}^{n} a_i \geqslant n,$$

当且仅当对每个 i，$a_i=1$ 时，等号成立。

我们把它的证明放到第21页。

这个定理的几何解释是：如果一个 n 维盒子（"长方体"）的体积是 1，则当它是一个 n 维立方体时，其棱长之和最小。你们很熟悉这个定理当 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形。当然，人们不容易想象维数超过 3 的空间。然而今天数学家们经常考虑三维以上的空间中，甚至无穷维空间中的问题。

定理 6 当 $n=2$ 时可以叙述成另一种形式：如果 b_1 和 b_2 是正数，则（利用 $a_1=b_1/b_2$，$a_2=b_2/b_1$）

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_1}\geqslant 2, \tag{4}$$

仅当 $b_1=b_2$ 时等号成立。

问题2. 给定 n 个正数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，与不等式(4)的形式相类似的定理 6 的提法是什么？

定义 2 n 个正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的算术平均值 A 是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

一些数的算术平均值常称为它们的**平均数**。

如果两个定理中的任一个成立蕴涵着另一个定理也成立，则我们说这两个定理是**等价的**。下面的命题与定理 6 等价，可是它更便于证明。我们将首先证明它，然后用它来证明定理 6。

定理 7 给定了和的 n 个正数，当它们全都相等时，其乘积最大。即，如果 $a_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$ 且 $\sum_{1}^{n} a_i$ 固定，比如说是 nA，则

$$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\leqslant A^n, \qquad (5)$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立。

从几何上来看这个定理表明：在所有棱长之和相同的 n 维盒子中，n 维立方体有最大体积。这个定理还有另一个等价的几何说法是：如果一条直线段被分割成给定数目的有限段，则当它们相等时，其长度的乘积最大。

如上所述，我们将先证定理 7，然后再用这个定理来证明定理 6。下面所给出的定理 7 的证明基于这样一种想法：如果给定的 n 个数不全相等（等于它们的平均），那么，我们可以两个两个地把大于平均数的减小，把小于平均数的增大，直到这些数全都相等为止，在这个过程中它们的乘积一直在增大。同时对 n 个数来做是困难的；一次处理两个更好些。因为乍一读时这个证明显得稍微复杂一点，所以与证明相平行，我们用一个例子来说明证明中的每个步骤。

定理 7 的证明 如果原来给出的 n 个数 a_i 全都等于 A，则和所说的一样，在(5)中等号成立。如果所给的正数中有一个不等于 A，则至少有一个大于 A，而且至少有一个小于 A。

挑出一个比A小的和一个比A大的，把它们叫做a_1和a_2，并写成$a_1 = A - h$和$a_2 = A + k$。当然，h和k是正数。

现在，我们要改变a_1和a_2，使得给定的n个数a_i的乘积增大，而保持它们的和固定为nA。

设$a'_1 = A$，又设

$$a'_2 = A + k - h,$$

则

$$a'_1 + a'_2 = 2A + k - h = a_1 + a_2;$$

因此

$$a'_1 + a'_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_1^n a_i = nA.$$

例如，假设$n = 4$，并设给定的正数是2，3，5和6。于是$A = 4$，并且给定的数中没有一个是等于A的。我们可选取$a_1 = 3$和$a_2 = 6$，于是$a_1 = 4 - 1$而$a_2 = 4 + 2$，所以$h = 1$和$k = 2$。

现在，我们要改变3和6，使得给定的四个数的乘积增大，而保持它们的和固定为$16 = 4 \cdot A$。

设$a'_1 = 4$，又设

$$a'_2 = 4 + 2 - 1 = 5,$$

则

$$a_1 + a'_2 = 4 + (4 + 2 - 1) = (4 - 1) + (4 + 2) = a_1 + a_2;$$

因此

$$4 + 5 + 2 + 5 = 3 + 6 + 2 + 5 = 4 \cdot 4.$$

显然a'_1和a'_2是正数。现在我们有了第二组n个正数，它们的和与原来的n个正数的和相同。

其次，我们注意到

$$a'_1 a'_2 > a_1 a_2.$$

这显然是对的，因为

$$a'_1 a'_2 = A(A + k - h) = A^2 + (k - h)A,$$

其次，我们注意到

$$4 \cdot 5 > 3 \cdot 6.$$

这是因为

$$4 \cdot 5 = 4(4 + 2 - 1) = 4^2 + (2 - 1) \cdot 4,$$

又因

$$a_1a_2=(A-h)(A+k)$$
$$=A^2+(k-h)A-hk,$$

由此得出 $a'_1a'_2=a_1a_2+hk$，其中 hk 是正数，按照定义1，这意味着 $a'_1a'_2>a_1a_2$。因而 $a'_1\cdot a'_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$

$$>a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n.$$

又因

$$3\cdot 6=(4-1)(4+2)$$
$$=4^2+(2-1)4-1\cdot 2,$$

因而

$$4\cdot 5\cdot 2\cdot 5>3\cdot 6\cdot 2\cdot 5.$$

如果现在 $A=a'_1=a'_2=a_3=\cdots=a_n$，则已经证完。如果不是这样，于是在新的 n 个数的集合 $a'_1,a'_2,a_3,\cdots,a_n$ 中至少有一个数大于A，并且至少有一个数小于A。把它们称为 b_1和 b_2，用 b_1 和 b_2 来扮演 a_1 和 a_2 的角色重复上面的论证，我们能求出和为 $n\cdot A$ 的另一组 n 个正数，它们的乘积比 $a'_1,a'_2,a_3,\cdots,a_n$ 的乘积更大。

如果我们一次又一次地重复这个过程，那么，最多 $n-1$ 步之后(包括第一次)，我们就已经构造出一组全都等于A，总和等于 nA 的 n 个正数，而它们的乘积比总和相同的任何其它 n 个正数的乘积更大。(看出最多需要$n-1$步是需要想一想的。)▌

在此例中，第一个数组是(3,6,2,5)，第二个是(4,5,2,5)，两步之后，数组是(4,4,3,5)。($b_1=2,b_2=5,b'_1=4$和$b'_2=3$。)在第三步即最后一步之后，它是(4,4,4,4)。注意我们也可以选取 $a_1=2$ 和 $a_2=6$，则第二个数组应是(4,4,3,5)而第三个数组应是(4,4,4,4)。因此，对于某些数组来说，用少于$n-1$步就可以完成这样的论证。

我们现在用这个定理来证明定理 6。

定理 6 的证明 给定 $a_i>0(i=1,\cdots,n)$ 且 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$；我们想要证明 $\sum_1^n a_i\geqslant n$，当且仅当所有的 a_i 都等于 1 时等号成立。我们用数学中一再使用的手法把这个问题化归前面的问题。即，我们用全体数的和去除每个给定的数，这样做了以后，我们就得到了总和为 1 的 n 个新数，能够应用定理 7。因此，我们设

$$s=\sum_1^n a_i \quad 和 \quad b_i=\frac{a_i}{s}.$$

因为 b_i 的算术平均值是

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}b_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{a_i}{s}=\frac{1}{n}\cdot\frac{s}{s}=\frac{1}{n},$$

从定理 7 我们得到结论

$$b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

仅当 $b_1=\cdots=b_n=1/n$ 时，等号成立。用原数 a_i 来表示，这个式子就是

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n}{s\cdot s\cdot s\cdot\cdots\cdot s}\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。但按照假设 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$，所以

$$\frac{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}{s\cdot s\cdot\cdots\cdot s}=\left(\frac{1}{s}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

或由定理 3 和 4，

$$n\leqslant s,$$

仅当每个 $a_i=1$ 时，等号成立。▌

你们可自己证明定理 6 蕴涵着定理 7。

作为当 $n=2$ 时定理 6 的一个简单应用，我们来证明：如果 x^2 是正数(即 x 是非零实数)，则

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

显然如果 $x^2>0$，则

$$\frac{x^2}{1+x^4}=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2};$$

但由定理 6，$x^2+(1/x^2)\geqslant 2$。所以，根据定理 3，如果 x 不是 0，就有

$$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2},$$

仅当 $x=\pm 1$ 时，等号成立。 ▌

注 在最后的不等式中，令 $x=0$，可看出此不等式对 $x=0$ 成立，因而对所有的 x 也成立。

问题3. 证明：如果 $a>1$，则 $\log_{10}a+\log_a 10\geqslant 2$。

定义 3 n 个正数 $a_1,\cdots,a_n$ 的几何平均值 G 是它们乘积的 n 次根：

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}\ .$$

定理 6 和定理 7 等价于著名而且有用的几何与算术平均值定理：

定理 8 n 个正数的几何平均值小于或等于它们的算术平均值。当且仅当 n 个数相等时，这两个平均值才相等。

证明 如果应用 $p=1/n$ 的定理 4，从(5)可直接推出要求的结论

$$G\leqslant A,$$

仅当每个 $a_i = G$ 时，等号成立。▎

用类似的方法，前三个定理中的任何一个都能够用来证明其它两个。你可以试试这样做。

在下一章中，我们将要叙述上面三个定理的若干几何应用。目前，我们满足于两个应用。第一个是：在有给定表面积的所有的三维盒子中，立方体有最大的体积。

证明 设 a，b，c 表示表面积为 S，体积为 V 的盒子的长、宽、高。显然

$$V = abc \quad 和 \quad S = 2(ab + bc + ca).$$

S 固定的假设，意即三个量 ab, bc, ac 的和是固定的，这启发我们对它们应用定理 7 或 8，其结果是

$$(ab \cdot bc \cdot ca)^{1/3} \leqslant \frac{ab + bc + ca}{3} \quad 或 \quad (V^2)^{1/3} \leqslant \frac{S}{6}.$$

因而

$$V \leqslant \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

仅当 $ab = bc = ac$ 时，等号成立。从这个结果我们看出，当 $a = b = c$ 时，即当盒子是立方体时，其体积最大。▎

第二个是：有最小表面积的体积为 V 的直圆柱是直径与高相等的直圆柱。

证明 我们用 S，r 和 h 分别表示体积为 V 的直圆柱的表面积、半径和高。于是

$$S = 2\pi(r^2 + rh) \quad 和 \quad V = \pi r^2 h.$$

所以

$$S = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r}\right).$$

因而，我们可认为 $S/6\pi$ 是三个数 r^2，$V/(2\pi r)$ 和 $V/(2\pi r)$

的算术平均值，所以由定理 8 知

$$\frac{S}{6\pi}\geqslant\left(\frac{V^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

但是这个不等式的右端项是固定的。因此，当等式成立时，即当

$$r^2=\frac{V}{2\pi r}\quad 或\quad V=2\pi r^3$$

时，S 最小。这样，当 $2r=h$ 时，S 最小。▌

问题4. 证明：如果 a，b 是正数，则

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\frac{a+nb}{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots),\tag{6}$$

仅当$a=b$时，等号成立。

问题 5. 证明：当$n\geqslant 2$时

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

问题 6. 证明：如果a,b和 c 非负，则

$$9abc\leqslant(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

问题 7. 利用本节的不等式(3)证明：如果 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n\frac{1}{a_i}\right)\geqslant n^2.$$

在下文中我们偶尔要用到绝对值的概念。下面我们来给出它的定义并简短地讨论它的用处。

定义 4 如果$x\geqslant 0$，则数 x 的绝对值是 x；如果$x<0$，则数 x 的绝对值是 $-x$。

x 的绝对值用$|x|$表示。定义 4 说

$$|x| = x, \quad x \geqslant 0$$

和
$$|x| = -x, \quad x < 0.$$

从这个定义推出 $|x|^2 = x^2$，而更重要的是

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

例如
$$|-6| = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

和第 4 页所说明的一样，如果用实数来表示直线上的点，则 $|x|$ 正好是从 x 或 $-x$ 到原点的距离，数 $|x-y|$ 是从实线上点 x 到实线上点 y 的距离。它也是从点 $-x$ 到点 $-y$ 的距离。显然

$$|x-y| = |y-x|.$$

如果有人还没有直线上两点间距离概念的直观形象，那么可以用上面的话来为他定义这个概念。为了方便起见，在以后的各章中，我们常常用符号 AB 来表示几何点 A 与 B 之间的距离。

重要的是应当注意，象

$$|x| < |y|$$

这样的单个不等式等价于两个联立不等式。例如，$-3 < x < 3$ 与 $|x| < 3$ 等价，方程 $|x| = 3$ 有两个根 3 和 -3。显然，当且仅当 $x = 0$ 时，$|x| = 0$。

问题 8. 证明：$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$。这个不等式的几何解释是什么？

第二章　等周定理

2.1　最大和最小问题

我们在第1.2节中碰到的在面积为1的所有矩形中，确定最小周长的矩形的问题，只不过是几何中的最大最小问题之一。公元前希腊几何学家们已经在研究这类问题了。当然，不能断定哪些人首先提出包含最大最小的问题，但是，很多问题的出现是非常自然的，有原始文化的人也许已经有了，或许还想到了这些问题。例如，是什么原因使很多花茎、树干和许多别的自然界的物体都是圆柱形的；为什么飘浮在空气中的小水滴和肥皂泡近似于球形；为什么鹿群在遭到狼的攻击时形成一个圆圈？很明显，这些问题只是间接地包含数学，但是它们却能够激发数学的思想。也有更直接的数学问题，例如：一块土地应是什么形状才能使给定长度的篱笆围住的面积最大；当给定了表面积，什么尺寸的圆柱形容器具有最大的容积？你们还能想出别的例子来吗？希腊人对于蜂房巢室的六角形排列之类的自然现象最感兴趣，但是，他们也有很多与战争有关的实际问题。例如，估计敌人帐篷大小的问题。可以假设人数大致上与他们所住帐篷覆盖的面积成正比，这样，知道了敌人帐篷的大小，就可以粗略地得出敌军的人数，而通常是从敌人帐篷的周长来估算它的面积的。不过，这种方法常常会给出错误的结论，所以，要寻求这个问题更好的更数学化的解法。

包含在上面引用的许多例子中的数学问题分两类：在有

某种性质的所有几何图形中，哪一个有最大面积或体积；在有某种性质的所有图形中，哪一个有最小周长或表面积？不确切地说，这两类问题都叫做等周问题；“等周”意即“有相等的周长”．著名的等周定理为一大类这种问题给出了解答，人类在发现它以后，花费了两千多年的时间才证明了它．

定理 9（等周定理）

（A）在具有给定周长的所有平面图形中，圆有最大的面积．

（B）在具有给定面积的所有平面图形中，圆有最小的周长．

用适合于三维空间的语言来说，这个定理变成

（A）在具有给定表面积的所有立体中，球有最大的体积．

（B）在具有给定体积的所有立体中，球有最小的表面积．

在本章中，我们将要讨论几个等周定理．我们从一些简单的定理开始，而以等周定理本身的讨论作为结束．首先允许我来稍微讲一点这个著名的定理的历史．矩形的等周问题的解答已经为生活在公元前300年的欧几里得(Euclid)所知；或许知道它还更早，因为欧几里得的《原本》中很多定理并不是由欧几里得最早做出来的．这个时代最伟大的数学家阿基米德(Archimedes，公元前287—212年)知道等周定理的叙述．到公元初年，几何中最大最小问题的研究已经有了显著的进展．事实上，我们知道生活在公元前200年到公元90年间某一时期的芝诺多罗斯(Zenodoros)写了一本题为《等周图形》的书，不幸的是，他的书的抄本没有流传给我们；不

过，生活于约公元300年的亚历山大里亚的帕普斯(Pappus)重新叙述和证明了他的结果。我们确有他的著作的版本①。当然，帕普斯知道等周定理，而更有趣的是，他认为他已经有了圆比同样周长的任何多边形有更大面积这个定理的一个证明。大体上，他的工作是正确的，也容易领会。

从希腊几何学家的工作直到十八世纪晚期瑞士人西蒙·路易里叶(Simon Lhuilier)以及他之后的他的同胞雅各布·斯坦纳(Jacob Steiner，1796—1863)的工作之前为止，几乎沒有取得什么进展。路易里叶和斯坦纳在他们的研究中所发展的方法在数学中有着巨大的影响并一直被使用。斯坦纳的方法本质上是几何的(而不是代数或分析的)，也就是说，是综合法。换句话说，他是从图形的几何性质而不是靠代数或微积分的定理和解析几何的方法来进行推理的。(在平面几何的学习中你用过，或者正在用综合法。)斯坦纳用他的方法解决了很多问题，这些问题甚至借助牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)在十七世纪中“发明”的微积分也沒有解决。而斯坦纳的工作本身又刺激了分析数学，特别是变分法的成长。这是因为他在等周定理的证明中有错误，现代数学的严格性的缔造者，德国数学家卡尔·维尔斯特拉斯(Karl Weierstrass)发现了这个错误，为了补上斯坦纳的证明的漏洞，维尔斯特拉斯必须进一步发展微积分学。他必须把整个学科置于一个严格的、逻辑完善的基础之上。斯坦纳的工作具有一种巨大的魅力。我力求用斯坦纳的精神来指导本章的讨论，并利用一切机会来阐明他的方法。

---

① Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique, Book V, edited by P. VerEcke, Brouwer, Paris, 1933.

2.2 三角形的等周定理

多边形是最简单的几何图形，而三角形又是多边形中最基本的图形。由于这个原因，关于三角形的两个提法构成了我们对等周定理研究的基础。

定理10

（A）在具有公共底边和周长的所有三角形中，等腰三角形有最大面积。

（B）在具有公共底边和面积的所有三角形中，等腰三角形有最小周长。

我们也还要用到一个定理，它可以用证明定理10A的同样方法来证明，而且实际上它是一个更强的定理。

定理10A′ 如果两个三角形有相同的底边和相同的周长，则另外两边长度之差较小的三角形有较大的面积。

现在我们来证明定理10A；为了尽可能广泛地理解定理，我们将用两种全然不同的方法来证明它，并且还要指出另一个证明。给出一个定理的几种证明在教科书中并不常见，但是我感到这还是应该的。这样做不仅可以通过揭示它们同各种想法的关系以导致对结果更加深入的理解，而且也考虑到了这样一个事实：对你来说最容易理解的证明，而你的朋友可能掌握起来有困难，但是，他或她却可以很好地理解别的证明。

我强烈地主张你们在阅读下面证明的时候，跟着证明的步骤自己去作图。一个特地作出的图形往往比课文中现成的说明更富有启发性。当你们自己想到了某些变化时，你们就应当用它们来做试验，不仅弄清楚已经做了什么，还要弄清楚什么还没有做。这是人们发现一个定理的证明或者理解别

人的证明的一种方法。

定理10A的证明 1 设 ABC 是以 AB 为底边的一个等腰三角形，又设 ABD 是有相同底边和周长的另一个三角形。这蕴涵 $AC+BC=AD+BD$（符号 XY 也表示从 X 到 Y 的距离）。因为 ABD 与 ABC 有相同的周长但不等腰，因而它必有一边，比如说 AD，使 $AD>AC$，而另一边 $BD<AC$（见图2.1）。AD 必交 BC 于 E，其中 $E\neq D$。如果不是这样，则，要么 D 应在 $\triangle ABC$ 的内部或边界上（见图2.2(a)），要么 C 应在 $\triangle ABD$ 的内部或边界上（见图2.2(b)）。从三角形两边长度之和大于第三边的长度的定理能够推出这些情形都是不可能的。尽管推理是简单的，但也许并不是显然的，所以，我要来叙述它！

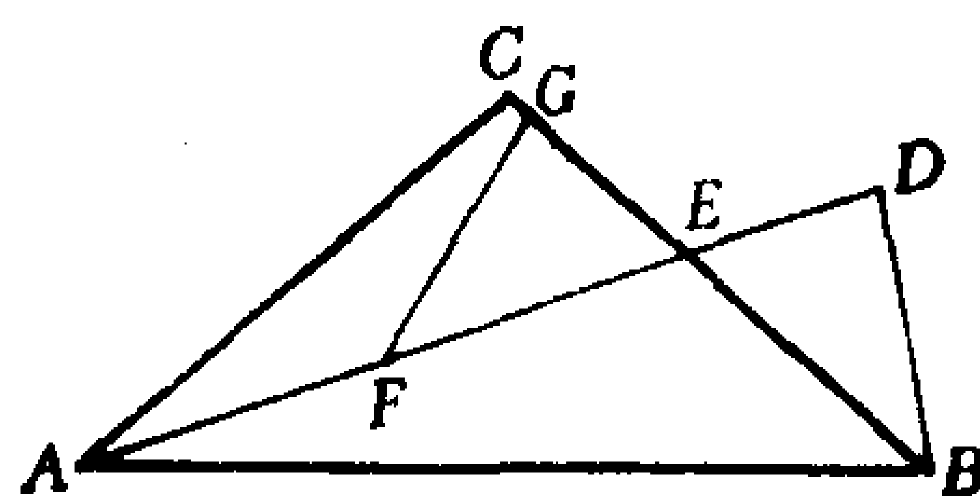


图 2.1

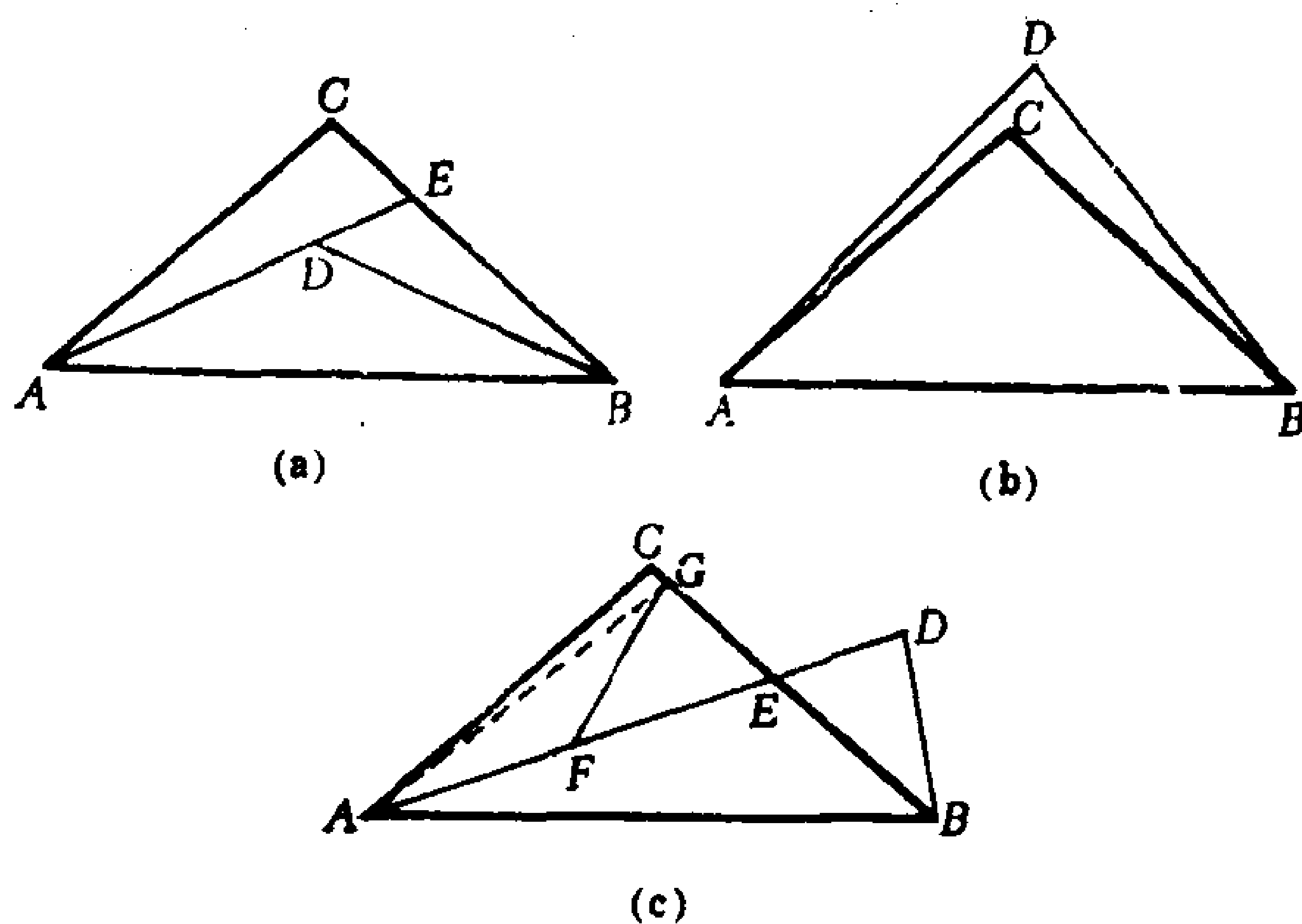


图 2.2

首先，我们假设D在$\triangle ABC$之内，而E是BC和AD延长线的交点。于是刚才引用的定理给出不等式

$$AC+CE>AD+DE \quad 和 \quad DE+EB>BD。$$

所以，由定理2，

$$AC+(CE+EB)+DE>AD+BD+DE$$

或

$$AC+CB>AD+BD。$$

最后一式与假设

$$AC+BC=AD+BD$$

矛盾。如果$D=E$，则上面的推理也导致与假设的矛盾。因此，和我们断定的一样，D在$\triangle ABC$之外。

其次，假设C在$\triangle ABD$之内或边界上(如图2.2(b))。如果确实如此，则由与上面一样的推理，我们可推出$AD+DB>AC+CB$，仍与假设矛盾。现在，我们进行定理的证明。

设F在AE上且$EF=EB$。因为$BE<AE$(由不等式$\angle EAB<\angle CAB=\angle EBA$保证)所以$F$的这种取法是可能的。又在$EC$(或它的延长线)上作$EG$，使$EG=ED$。我们要证明$G$确实位于$C$和$E$之间。因为$\triangle EFG$和$\triangle EBD$全等，于是我们知道$\triangle ABC$的面积大于$\triangle ABD$的面积。为证$G$位于$C$和$E$之间，我们首先注意

$$FG=BD \quad (\triangle EFG\cong\triangle EBD)$$

和

$$AC+BC=AD+BD \quad (由假设)。$$

我们现在看出

$$AC+BC=AF+FD+FG=AF+BG+FG$$
$$=AF+BC\pm CG+FG$$

或

$$AC=AF\pm CG+FG,$$

式中正负号取决于G是位于E和C之间还是在C之外。而

$$AC=AF+CG+FG$$

是不可能的，因为直线距离是两点间的最短距离；所以，G 位于E和C之间。

设$T(XYZ)$表示三角形XYZ的面积。则

$$
\begin{aligned}
T(ABC) & \\
&= T(ABE)+T(EFG)+[T(AFG)+T(ACG)] \\
&= [T(ABE)+T(BDE)]+[T(AFG)+T(ACG)] \\
&= T(ABD)+[T(AFG)+T(ACG)].
\end{aligned}
$$

从而，
$$T(ABC)>T(ABD). \quad \blacksquare$$

在我们进行定理10 A的第二个证明之前，我们要约定一些记号，并回忆平面几何中的一个定理。我们永远约定：若ABC是三角形，则a,b,c表示它的边长；即

$$a=BC, \quad b=AC, \quad c=AB.$$

还约定P是它的周长，T是它的面积。

我们要回忆的定理属于赫伦(Heron)。

赫伦定理 对任何三角形ABC，

$$16T^2=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] \tag{7}$$

和

$$16T^2=P(P-2a)(P-2b)(P-2c). \tag{7'}$$

证明 设h表示高AD的长度(见图2.3)，又设$e=DC$。则

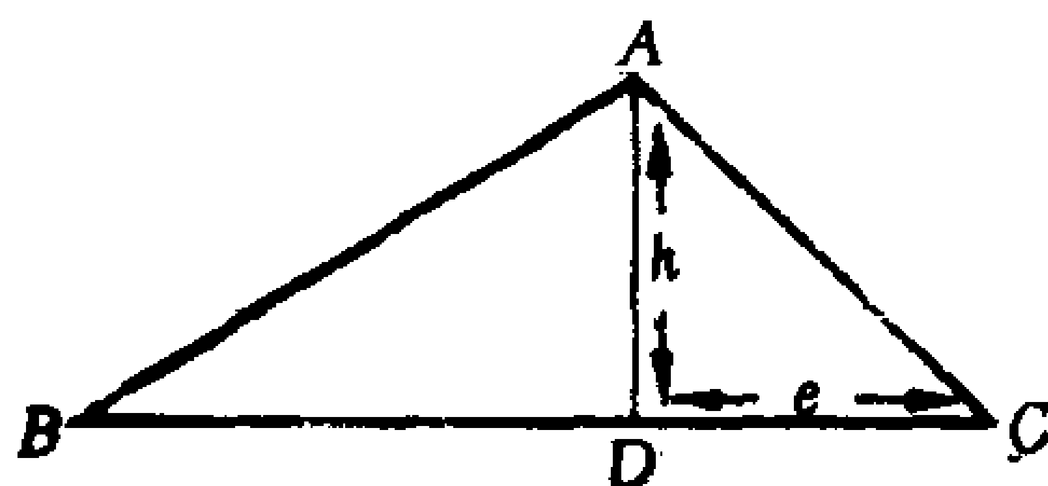


图 2.3

$$
\begin{aligned}
c^2-(a-e)^2 &= h^2 \\
&= b^2-e^2.
\end{aligned}
$$

因此，
$$c^2-a^2+2ae=b^2;$$

或，因为$a\neq 0$，所以

$$e=\frac{1}{2a}[a^2+b^2-c^2].$$

三角形的面积是底与高的长度乘积的一半。利用这个定

理及h^2的值是b^2-e^2，我们求出

$$\begin{aligned}2T&=ah,\\4T^2&=a^2h^2=a^2(b^2-e^2)\\&=a^2\left[b^2-\frac{1}{4a^2}(a^2+b^2-c^2)^2\right],\\16T^2&=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\\&=[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\\&\quad\cdot[2ab-(a^2+b^2-c^2)]\\&=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2].\end{aligned}$$

这就证明了公式(7)。因为右端每个因子都是平方差，它可进一步分解因式并写成形式

$$(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$$

如果我们现在用P来代替$a+b+c$，就可看出能把(7)写成(7′)。∎

也许你们更熟悉定理的不甚方便的形式

$$T=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2},$$

其中$s=P/2$。这是把(7′)的两端除以4，再把所得等式的两端开平方根而得。定理10A的第二个证明以(7)为基础。

定理10A的证明 2 考查(7)式，我们注意到$16T^2$是两个因子的乘积。如果P和c固定，则$a+b$也就固定了；因此，头一个因子就是固定的。所以，如果第二个因子增大，乘积$16T^2$也增大。如果$a-b$减小就是这种情形。而当$a-b=0$时，第二个因子最大；所以，当$a=b$时，T最大。∎

练习。利用定理10A两个证明之一中所用的推理来证明定理10A′。

问题 9。利用定理10B给出定理10A的第三个证明。

提示 看下面定理10A蕴涵定理10B的证明。

赫伦公式也可以用来证明定理10 B。

定理10B的证明 因为按照假设c是固定的，因而当$a+b$最小时，P最小。但是因为按照假设T也是固定的，于是(7)中两个因子$[(a+b)^2-c^2]$和$[c^2-(a-b)^2]$的乘积$16T^2$是常数。所以，当第二个因子最大时，第一个因子最小，但当$a+b$最小时，赫伦公式(7)中第一个因子最小。因此，当第二个因子最大时，即当$a-b=0$或$a=b$时，$a+b$最小。 ❙

定理10 B的另一个与上面的证明独立的证明包含在第三章3.1节末尾的证明中。

容易证明定理10 A和10 B是等价的。我们将给出第一个定理蕴涵着第二个定理这个事实的完整的证明．它的逆命题是问题 9 。

定理10A蕴涵定理10B的证明 设△[①]是面积为T，周长为P的任一三角形。假设$\triangle_1$是与△有相同底边和面积的等腰三角形，但周长为P_1。我们将证明$P\geqslant P_1$，且仅当△是等腰三角形时，等号成立。

假设$\triangle_2$是与△有相同底边的等腰三角形，周长为P，面积为T_2，定理10A保证

$$T_2>T.$$

因为$\triangle_1$和$\triangle_2$同底又同为等腰三角形，这蕴涵着$\triangle_2$的周长P(因此△的周长)大于P_1。 ❙

容易用一个例子来说明以上的证明。设△是边长为3，4，5个单位的直角三角形。则$T=6$，而$P=12$(见图2.4)。

设 BC 是△的底边。于是，与△同底同面积的等腰三角形$\triangle_1$的两腰各长$\sqrt{13}$，周长$P_1=4+2\sqrt{13}$。显然$\sqrt{13}<4$；

① 有时，用符号“△”来代替特定的三角形更好些。本例就是这种情形。

所以

$$P_1=4+2\sqrt{13}<4+2\cdot4=12=P.$$

现在与△同底等周的等腰三角形$\triangle_2$的腰长是4（事实上，$\triangle_2$是等边三角形），$T_2=4\sqrt{3}$。因为$4\sqrt{3}>6$，因此和预料的一样$T_2>T$。

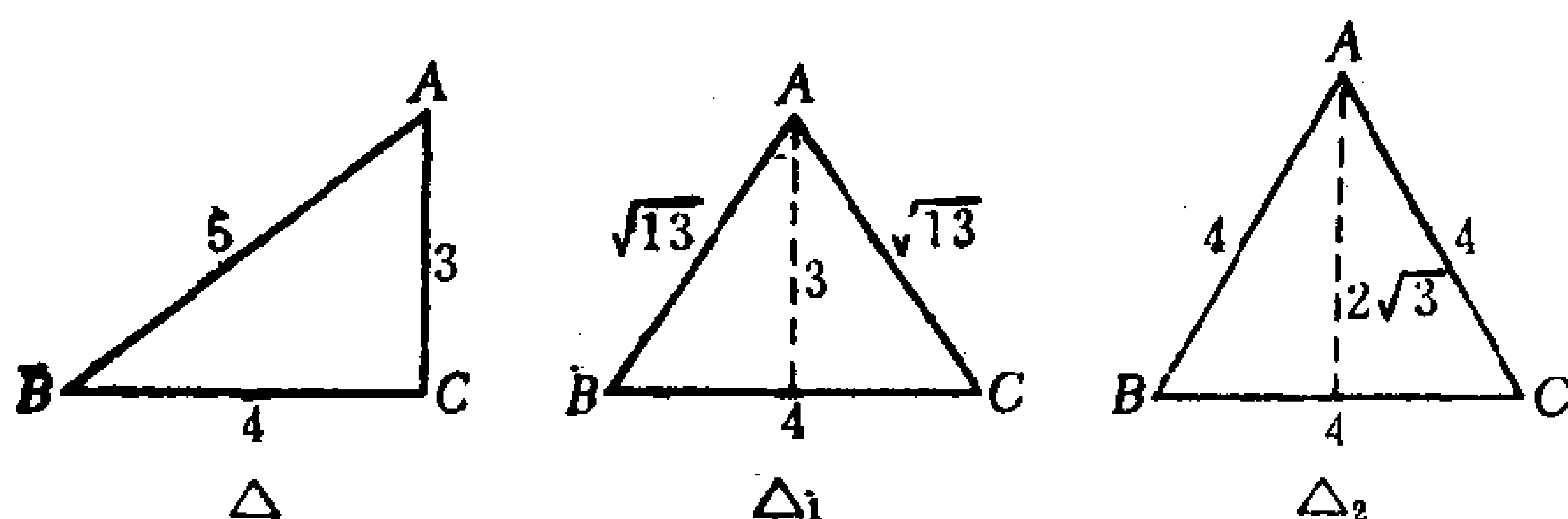


图 2.4

现在，自然会问：是否有那种我们已经能够证明的与定理10紧密相关的定理呢？在你继续往下读之前，请先试着想出几个来。从与定理10的联系的观点来看，最显然的一个定理是三角形的等周定理；即

定理11A 在具有给定周长的所有三角形中，等边三角形有最大面积。

我们要介绍这个定理的三个证明，它们各有各的优点。第一个证明本质上是定理7（见第18页）的一个说明，因此，它真正依赖于算术和几何平均值定理。第二个证明较长，但它阐明了数学中的一种重要方法。第三个证明几乎和第一个证明同样简短，它从几何上反映了定理7的证明中的代数作法。

证明1 设ABC是任一三角形。因为P是固定的，公式(7)告诉我们：当$(P-2a)(P-2b)(P-2c)$最大时，$16T^2$最大。由定理7，当$P-2a=P-2b=P-2c$时，即当$a=b=c$

时，达到这个最大值。因而，等边三角形的T最大。|

证明 2 这个证明属于西蒙·路易里叶，它包含逐次逼近法，由于即使在今天，数学中也常常使用这个方法，所以，很值得在这里加以介绍。它也将给你们一个机会，使你们更加熟悉极限的概念。

假设$\triangle_1$是任一三角形，它有周长P和面积T_1。我们还约定$\triangle_1$不是等边三角形，否则就无须讨论了。我们要证明：如果$\triangle$是面积为T，周长为P的等边三角形，则$T>T_1$。为此，我们要构作三角形的无穷序列

$$\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_n,\cdots,$$

其中每个三角形的周长都是P，而后一个三角形的面积又比前一个三角形的面积更大。随着n越变越大，三角形$\triangle_n$将变得越来越象等边三角形，而它们的面积将趋向$\triangle$的面积。以后我们要更加确切地说明这一点。

现在，我们定义序列$\{\triangle_n\}$。序列中的第一个三角形是$\triangle_1$。假设它的底边长度是b，另外两边的长度是a_1和a_2。设$s_1=a_1+a_2$。序列中的第二个三角形是底长为b，腰长为$s_1/2$的等腰三角形$\triangle_2$。设$s_2=b+s_1/2$。序列中的第三个三角形是底长为$s_1/2$，腰长为$s_2/2$的等腰三角形$\triangle_3$。当$n\geqslant 3$，在已经作好等腰三角形$\triangle_n$之后，我们取$s_n=(s_{n-2}+s_{n-1})/2$，并

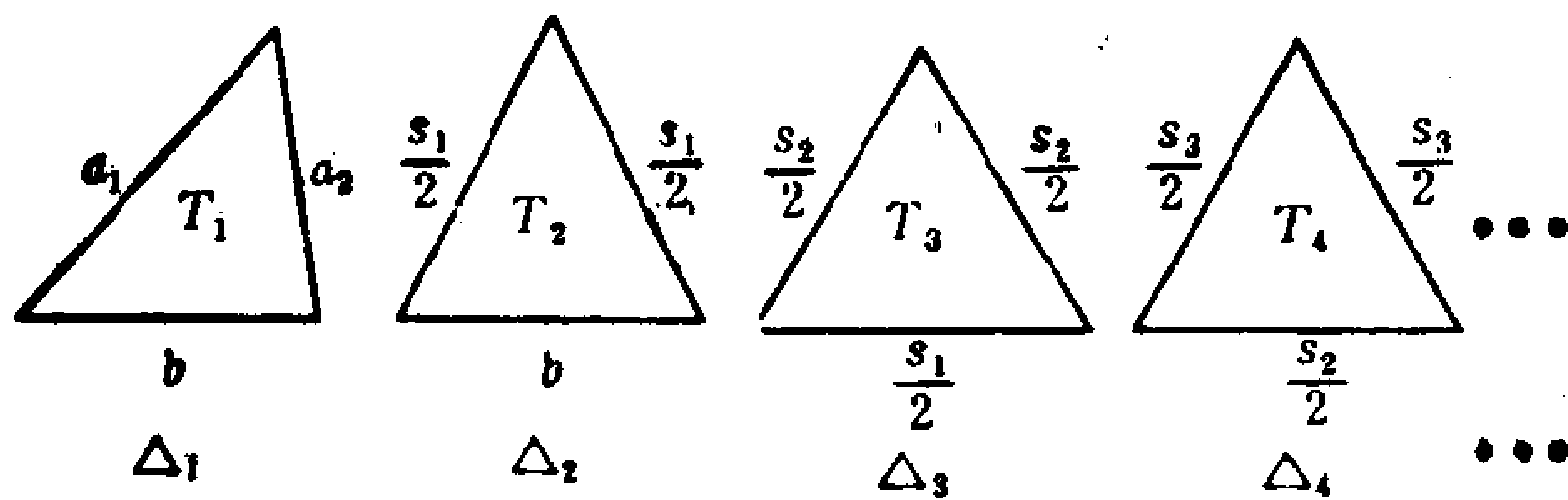


图 2.5

作以$s_{n-1}/2$为底长，以$s_n/2$为腰长的等腰三角形$\triangle_{n+1}$。无限继续这个步骤。因为在我们每一步作法中，新三角形有一边和它前一个三角形的一边长度相同，而另外两边长度之和保持不变，所以已作出的序列中的每个三角形的周长都是P。

由于我们已经给出了定理的一个证明，因此我们知道问题的解存在。现在，我们必须回答的问题是：在某种合理的意义下，以P为周长的等边三角形是序列$\{\triangle_n\}$的极限，这究竟对不对？我们试图有力地证实肯定的回答。读者绝不能轻易地排除序列$\{\triangle_n\}$可以沒有极限的可能性。在考虑过更多的例子以后，我们将在2.4节中讨论这类可能发生的事情。

考虑三角形$\triangle_n$的面积和周长。设T_n是$\triangle_n$的面积。因为$\triangle_n$和$\triangle_{n+1}$都有一边的长度是$s_{n-1}/2$，又有相同的周长，从定理10A可得，$T_{n+1}>T_n$对每个n成立。

还有，我们的三角形变得越来越接近等边三角形。为证明这一点，注意对每个n，三角形$\triangle_n$有两边长为$s_{n-1}/2$而第三边长为$s_{n-2}/2$。我们可用一对不相等的边的长度之差$(s_{n-1}-s_{n-2})/2$来测量第n个三角形与等边三角形的偏差有多大。从下面的计算可以看出这些差随n增大而变小，而且事实上趋于零。

$$s_2-s_1=\left(b+\frac{1}{2}s_1\right)-s_1=b-\frac{1}{2}s_1,$$

$$s_3-s_2=\left(\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2\right)-s_2=\frac{1}{2}(s_1-s_2)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{2}s_1\right),$$

$$s_4-s_3=\left(\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{2}s_3\right)-s_3=\frac{1}{2}(s_2-s_3)$$

$$=2^{-2}\left(b-\frac{1}{2}s_1\right),$$

………………………………………………………………

$$s_n-s_{n-1}=\left(\frac{1}{2}s_{n-2}+\frac{1}{2}s_{n-1}\right)-s_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-2}2^{-(n-2)}\left(b-\frac{1}{2}s_1\right),$$

$$s_{n+1}-s_n=\left(\frac{1}{2}s_{n-1}+\frac{1}{2}s_n\right)-s_n$$

$$=(-1)^{n-1}2^{-(n-1)}\left(b-\frac{1}{2}s_1\right),$$

………………………………………………………………

现在请允许我在余下的证明中求助于你们的常识和直观。差$s_{n+1}-s_n$的上述估计保证了

$$\lim_{n\to\infty}(s_{n+1}-s_n)=0。$$

这个式子读作"差$(s_{n+1}-s_n)$当n变为无穷大时的极限是零。"我们定义这个式子的确切含义是：给定一个正数e(任何一个，无论大小)，就能求得一个正整数N，使得对所有比N大的整数n，有

$$|s_{n+1}-s_n|<e。\tag{8}$$

重要的是，注意总是先固定e，然后去寻找N。注意到

$$|s_{n+1}-s_n|=\frac{\left|b-\frac{1}{2}s_1\right|}{2^{n-1}},$$

又因$|b-s_1/2|$是固定的，所以，如果n取得足够大，右端项将变得象我们要求的那样小，这就证实了(8)。因为每个三

角形$\triangle_n$有周长P，利用(8)可证

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{3}P \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T. \tag{9}$$

(按照定义，$\lim_{n\to\infty} T_n = T$ 意即，任给正数 e，能求得正整数 N，使得对所有大于N的整数 n，有$|T_n - T| < e$。) 包含在(9)式中的结论能用(8)严格证明。不过，这样的证明属于极限论，它超出了我们研究的范围。最后，由于 $T_{n+1} > T_n$，显然对任何 n，有$T > T_n$。特别地，$T > T_1$。 ▎

定理11 A 的第三个证明属于雅各布·斯坦纳。他借助一个巧妙的几何作图法，灵巧地迴避了使用路易里叶所用的逐次逼近法。

证明 3 考虑周长为P，面积为T_1，边长为 a,b,c 的任一三角形$\triangle_1$，其中$a \geqslant b \geqslant c$，所以$P/3 \geqslant c$。为了简化证明，我们假设 c 比 a 更接近 $P/3$，并且令

$$h = \frac{P}{3} - c > 0.$$

代替前一证明中所作的等腰三角形 $\triangle_2$，我们现在作一个底边为 b，另两边长为 $P/3$ 和 $a-h$ 的三角形 $\triangle_2$(见图2.6)，把它的面积称为 T_2(你应当自己用尺子和圆规作出这个图形。) 因为

$$(a-h) + \frac{P}{3} = a + \left(\frac{P}{3} - h\right) = a + c,$$

所以 $\triangle_2$ 也有周长P。其次，我们注意$\triangle_1$的两边 a 和 c 长度之差大于 $\triangle_2$ 的两边长度之差；即

$$a - c > (a-h) - \frac{P}{3}.$$

因为从不等式

$$c=\frac{P}{3}-h<\frac{P}{3}+h$$

可推出

$$a-c>a-\left(\frac{P}{3}+h\right)=(a-h)-\frac{P}{3},$$

可见这是对的。现在我们把定理10A′（见第29页）用于三角形 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$，得到结论 $T_2>T_1$。

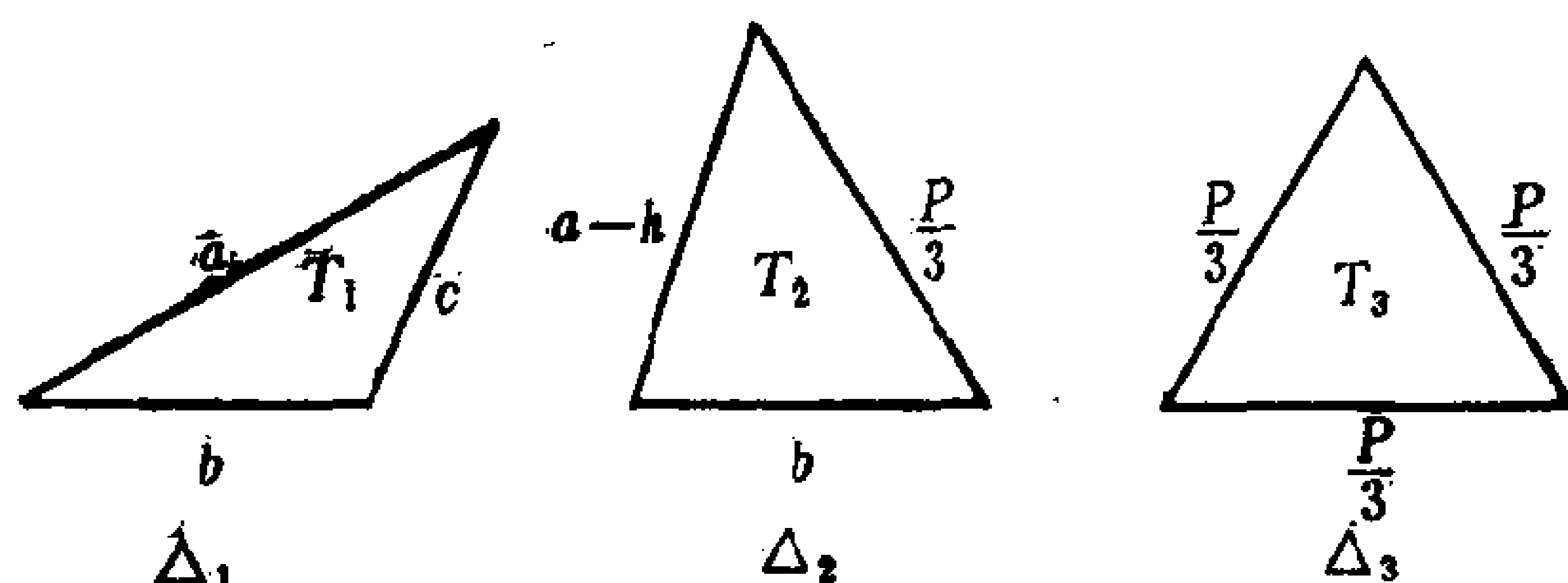


图 2.6

接着我们再作底为 $P/3$，两腰各长

$$\frac{1}{2}\left[\frac{P}{3}+h+c\right]$$

的等腰三角形△。由于这个数就是 $P/3$，因此三角形△是等边的；由定理10A，它的面积大于 T_2。因此 $T>T_1$。如果

$$a-\frac{P}{3}<\frac{P}{3}-c,$$

可进行类似的论证。

与定理 11A 相对应的定理是

定理11 B 在具有给定面积的所有三角形中，等边三角形有最小周长。

问题10. 证明定理11A 和 B 是等价的。

问题11. 用赫伦公式（7）证明定理11 B。

问题12. 在外切于给定圆的所有三角形中，哪一个有最小面积？哪一个有最小周长？证明你的猜测。

提示 利用证明定理10A和10B等价的方法。

问题13. 在内接于给定圆的所有三角形中，哪一个有最大面积？哪一个有最大周长？① 证明你的猜测。

问题14. 在有给定周长(或面积)的所有三角形中，哪一个有最小的外接圆？证明你的断言。

提示 利用问题13的结果。

现在该是注意(你可能已经注意到了)等周定理成对出现的事实的时候了。定理9,10,11就是这个现象的例子。情况是这样的，假设C是一类平面图形，对于它，下述的等周定理成立：

(＊) 在C类里周长为P的所有图形中，“××形”有最大面积。

进一步假设所有的“××形”是相似的，则以下的说法也是一个定理：

(＊＊) 在C类里面积为A的所有图形中，“××形”有最小周长。

作为一个例子，设C是所有三角形的类，又设“××形”是等边三角形。则(＊)给出定理11A，(＊＊)给出定理11B。因为它们是等价的，所以这两个命题称为**对偶定理**。我们已经注意到了等周问题的理论包含对偶性；也就是说，等周定理以等价的一对的形式出现。

(＊)和(＊＊)的等价性可用上面多次用过的方法来证

① 尽管这个结果是相当明显的，但给出一个严格的初等证明却很难。

明。例如：为证明从(*)可推出(**)，我们假设(*)成立并证明(**)。设F是C中面积为A，周长为P的任一图形，设B_1是C中面积为A，周长为P_1的“××形”，又设B_2是C中面积为A_2，周长为P的“××形”。我们将要证明$P \geqslant P_1$。按(*)，$A_2 \geqslant A$。由于所有的“××形”相似，又因B_2的面积超过B_1的面积，因此B_2的周长超过B_1的周长。所以$P \geqslant P_1$。▎同样容易证明(**)蕴涵着(*)。

2.3 多边形的等周定理

我们下面把注意力转向四边形和一般的多边形。为简单起见，我们把n条边的多边形称为n边形。正n边形是有相等的边和相等的角的n边形。自然要问：在给定周长的所有n边形中，哪一个的面积最大？猜想正n边形就是这样的n边形是合情合理的。可是，证实这个猜测与证明等周定理原来是同样困难的事情。所以，在考察它之前，我们将要考虑一些简单的问题。例如：在内接于一个给定圆周的所有n边形（n固定）中，哪一个的面积最大？由于匀称的缘故，我们可以猜想正n边形仍然是这样的n边形。(是不是与不存在比任何其它正多边形边数更多的正多边形一样，也不可能有内接于给定圆周的面积最大的n边形呢？直观告诉我们，事情并非如此，这次直观确实是对的。)既然已经猜出了答案，我们现在要来证明它。为此，我们要用定理11 A第三个证明中所给出的斯坦纳的方法。

定理12 在内接于给定圆周的所有n边形中，正n边形的面积最大。

证明 首先，我们注意第四章问题13的解答给出了当$n=3$时定理的证明，因此，在定理12余下的证明中，我们假

设 n 大于3。其次，应当强调的是：内接于一个圆的种种 n 边形既有不同的面积也有不同的周长。

设 R 是内接于半径为 r 的给定圆 Q 的正 n 边形，用 s 表

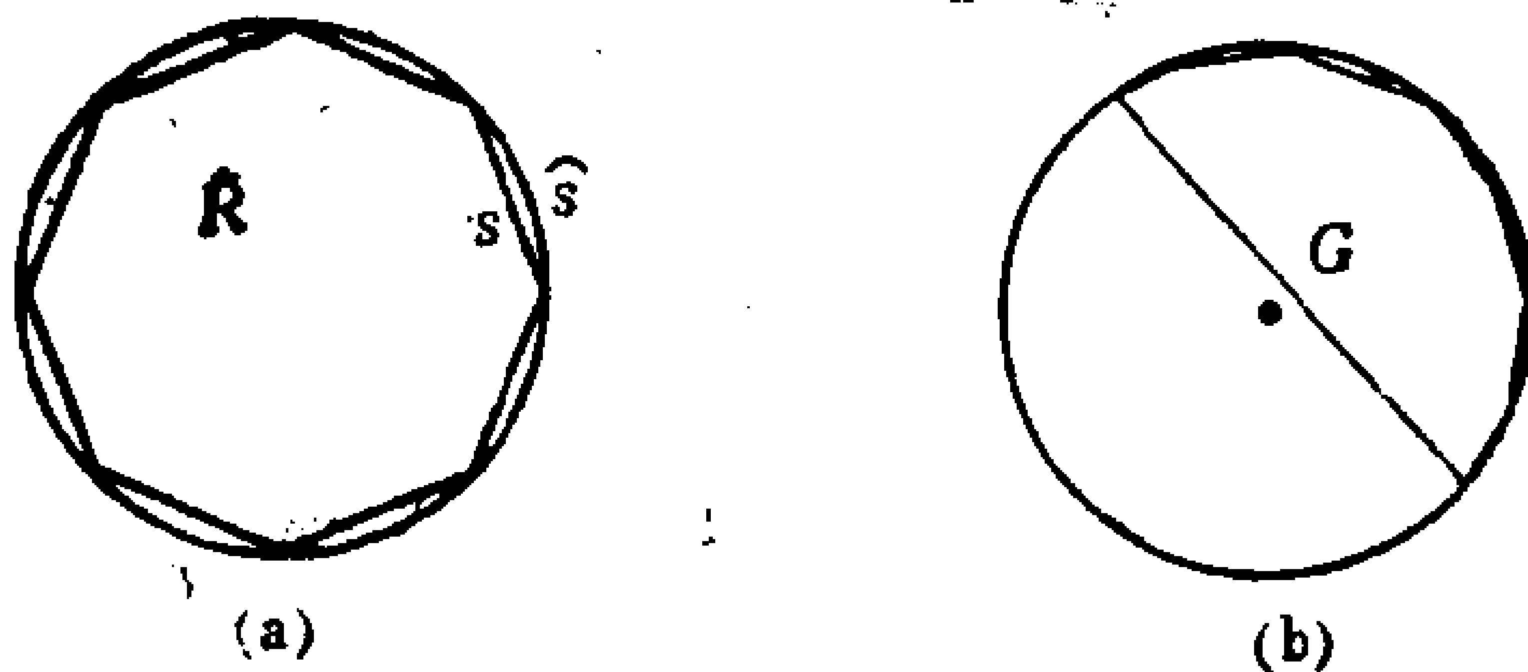


图 2.7

示 R 每一边的长度，用 $\widehat{s}$ 表示每一条对弧的长度（见图2.7(a)）。因为 Q 有圆周长 $2\pi r$，

$$\widehat{s}=\frac{2\pi r}{n}.$$

设 G 是内接于 Q 的任一 n 边形。如果 Q 的中心不在 G 内（见图2.7(b)），由于这时 G 在一个半圆之中，于是 G 的面积显然小于 $\pi r^2/2$。但是计算表明正 n 边形（$n>3$）的面积比它的外接圆面积的一半要大。因而，如果 Q 的中心不在 G 内，则定理成立。今后我们假设 Q 的中心在 G 内。

余下的这部分证明包含很多的细节。在你们去钻研它们之前，阅读和思考定理的证明时，可以不必注意这些细节。但是，要注意推理的主要步骤，并要使你自己信服：如果这些步骤是对的，就得到了要证的结论。主要步骤是以下三步：

（1）作图法1——作一个与 G 有相同的边长和相同面积，但它的最长边与最短边相邻，并且内接于 Q 的 n 边形 G_1 的方法。

(2)作图法 2 ——作一个比G至少多一条长度为s的边，面积比G和G_1大，并且内接于Q的n边形G_1'的方法。

(3)一次又一次地重复这些作图法。

我们用a_i表示G的边长，用$\widehat{a_i}$表示对应的对弧的长度。如果G不是正多边形，则它至少有一边长度小于s，并且至少有一边长度大于s。因为，如果

$$a_i \leqslant s \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则至少对一个i，$a_i<s$，比如说$a_1<s$，否则G就是正多边形了。但若

$$a_1<s \quad 和 \quad a_i \leqslant s \quad (i=2,3,\cdots,n),$$

则 $$\widehat{a_1}<\widehat{s} \quad 和 \quad \widehat{a_i} \leqslant \widehat{s} \quad (i=2,3,\cdots,n),$$

从而

$$\widehat{a_1}+\widehat{a_2}+\cdots+\widehat{a_n}<n\widehat{s}=2\pi r.$$

但是$\widehat{a_1}+\widehat{a_2}+\cdots+\widehat{a_n}=2\pi r$(是$Q$的圆周)。所以，不可能对从1到$n$的每个$i$，$a_i \leqslant s$。类似地，也不可能对从1到$n$的每个$i$，$a_i \geqslant s$。

作图法 1． 假设G的最长边的长度是a_n而最短边的长度是$a_1(a_1<s<a_n)$。利用单纯重排G的边的次序而使最长

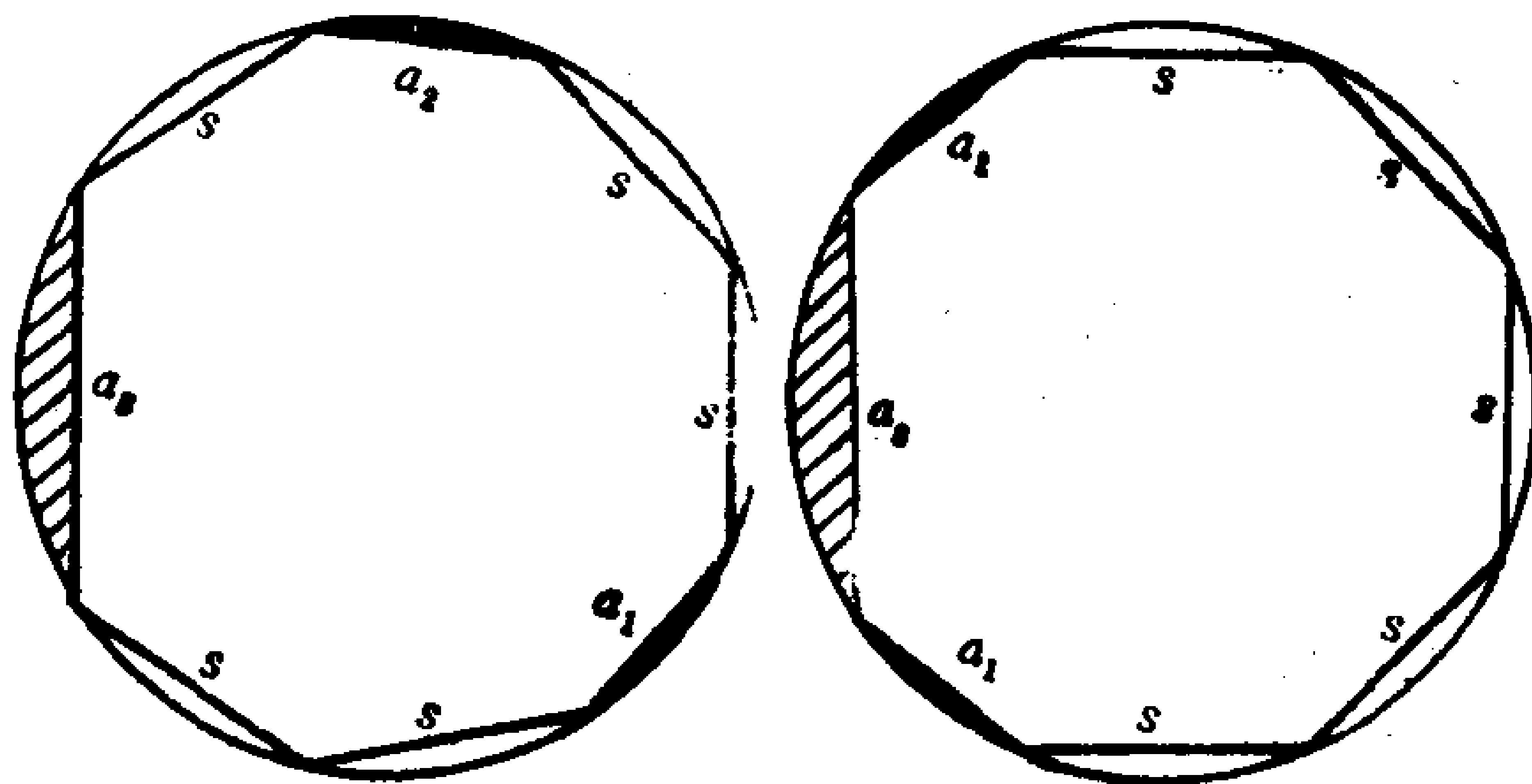


图 2.8

边和最短边相邻的办法，我们可作一个新的 n 边形 G_1（见图2.8）。

因为每个 n 边形的面积都等于 Q 减去同样一些小块（图2.8中由弦及其对弧围成的区域）的面积，显然这样作出的 n 边形 G_1 和 G 有相同的面积。

我们接着作另一个也内接于 Q 的 n 边形 G_1'，并使 G_1' 的面积比 G_1 大，因而也比 G 更大。

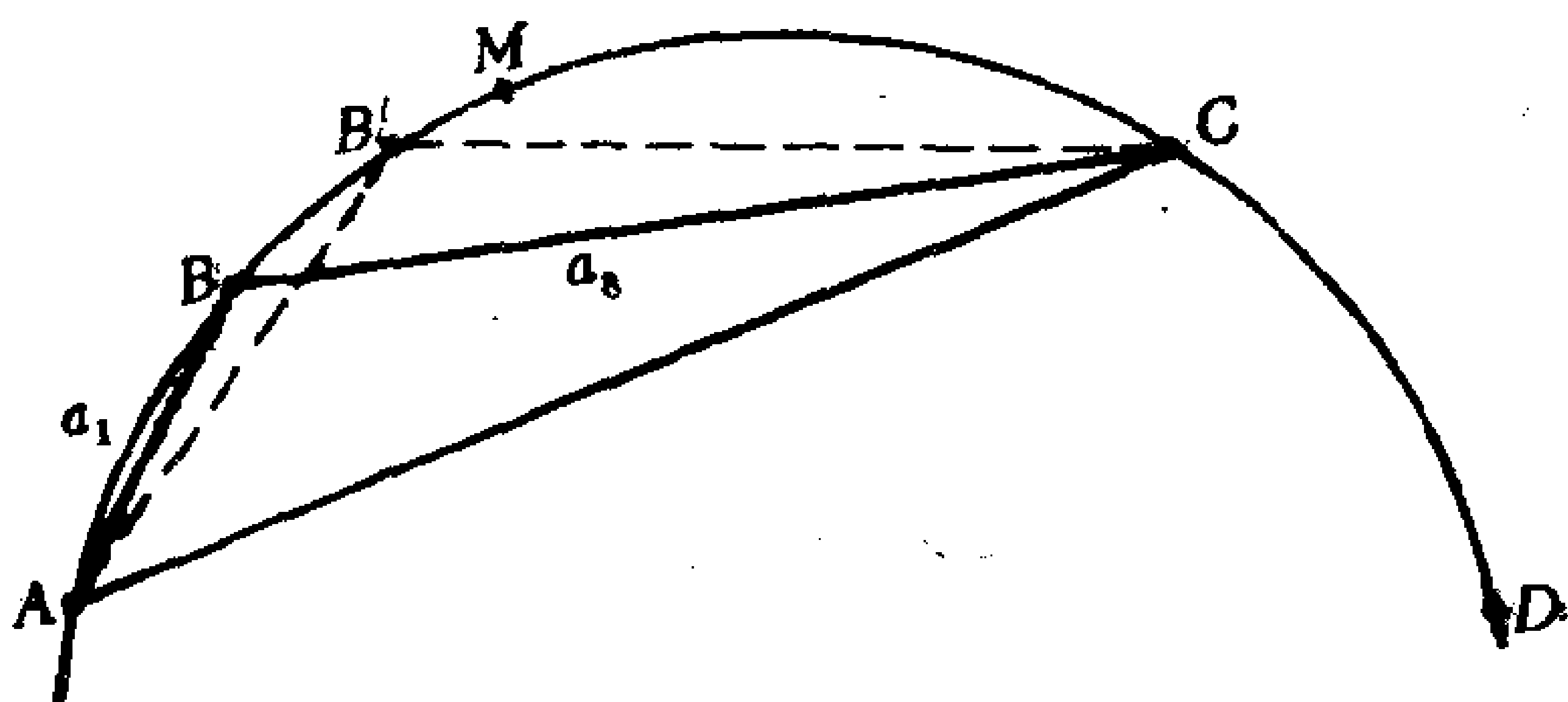


图 2.9

作图法 2． 考虑 a_1 和 a_n 所对的弧 AB 和 BC。我们记得 $\widehat{a_1}<\widehat{s}$ 和 $\widehat{a_n}>\widehat{s}$，我们把图2.9看成是图2.8中所见的 G_1 的一部分的放大图解。保持 A 和 C 固定，沿弧移动 B 到点 B' 使得 $\widehat{AB'}=\widehat{s}$。作 n 边形 G_1'，除了用 B' 代替 B 作为顶点之外，它与 n 边形 G 是一样的。

考虑三角形 ABC 和 $AB'C$。现在，我们想用"证明" B' 处的高比 B 处的高更长的办法，使得 $\triangle AB'C$ 的面积比 $\triangle ABC$ 的面积更大这件事看来似乎有理。相信高将随着 B 点接近 ABC 的中点 M 而增大是合理的，所以我们仅限于表明 B' 比 B 更接近 M，或 $\widehat{B'M}<\widehat{BM}$。

因为 $\widehat{a_1}<\widehat{s}$ 和 $\widehat{a_n}>\widehat{s}$，令

$$\widehat{a_1}=\widehat{s}-h \quad 和 \quad \widehat{a_n}=\widehat{s}+k, \qquad h>0, \qquad k>0.$$

但 $$\widehat{AM}=\frac{1}{2}(\widehat{a_1}+\widehat{a_n}),$$

所以

$$\widehat{BM}=\widehat{AM}-\widehat{AB}=\frac{1}{2}(\widehat{a_1}+\widehat{a_n})-\widehat{a_1}=\frac{1}{2}(\widehat{a_n}-\widehat{a_1})$$

$$=\frac{1}{2}(\widehat{s}+k-\widehat{s}+h)=\frac{1}{2}(k+h),$$

又 $$\widehat{B'M}=|\widehat{AM}-\widehat{AB'}|=\frac{1}{2}|\widehat{a_1}+\widehat{a_n}-2\widehat{s}|$$

$$=\frac{1}{2}|\widehat{s}-h+\widehat{s}+k-2\widehat{s}|=\frac{1}{2}|k-h|.$$

由于 k 和 h 是正数，$|k-h|<k+h$。所以，如前所述

$$\widehat{B'M}<\widehat{BM}.$$

现在，你可以相信 $\triangle AB'C$ 比 $\triangle ABC$ 有更长的高，因而它有较大的面积了，不过，你应当认识到我们的证明并不是很细致的。利用 $|a-c|<|CB'-s|$ 的事实和下述定理可以给出一个严格的证明：在立于同底(AC)上并有相同顶角（等于 $\angle ABC$）的两个三角形中，其它两边长度之差较小的三角形有较长的高和较大的面积。（这个定理的证明包含了第4章中所介绍的问题13的解答中的一些步骤，而其余步骤需要修改。）

现在我们有了内接于 Q 的一个 n 边形 G_1'（有顶点 A, B, C 等），它比 G 面积大，比 G 有更多的边（至少多一边）长度是 s。因为 $\triangle AB'C$ 的面积超过 $\triangle ABC$，而 G_1' 和 G_1 除沿 AB 和 BC 以及 AB' 和 $B'C$ 外重合，因此 G_1' 的面积超过 G_1 的面积。如果 G_1' 是正 n 边形，则已经证完。如果还不

是，则可以重复上面的作图法。总共最多应用 $n-1$ 次之后，我们就得到一个内接于给定圆的正 n 边形，它比 G 有更大的面积。▌

还能给出四边形的等周定理的一个初等证明（初等证明未必就是简短和容易的证明——初等证明只是不包含深奥的高等数学而已）。

定理13 在具有给定面积的所有四边形中，正方形有最小周长。

首先证明对偶定理——在具有给定周长的所有四边形中，正方形有最大面积——比较容易，然后化归要求的结论。

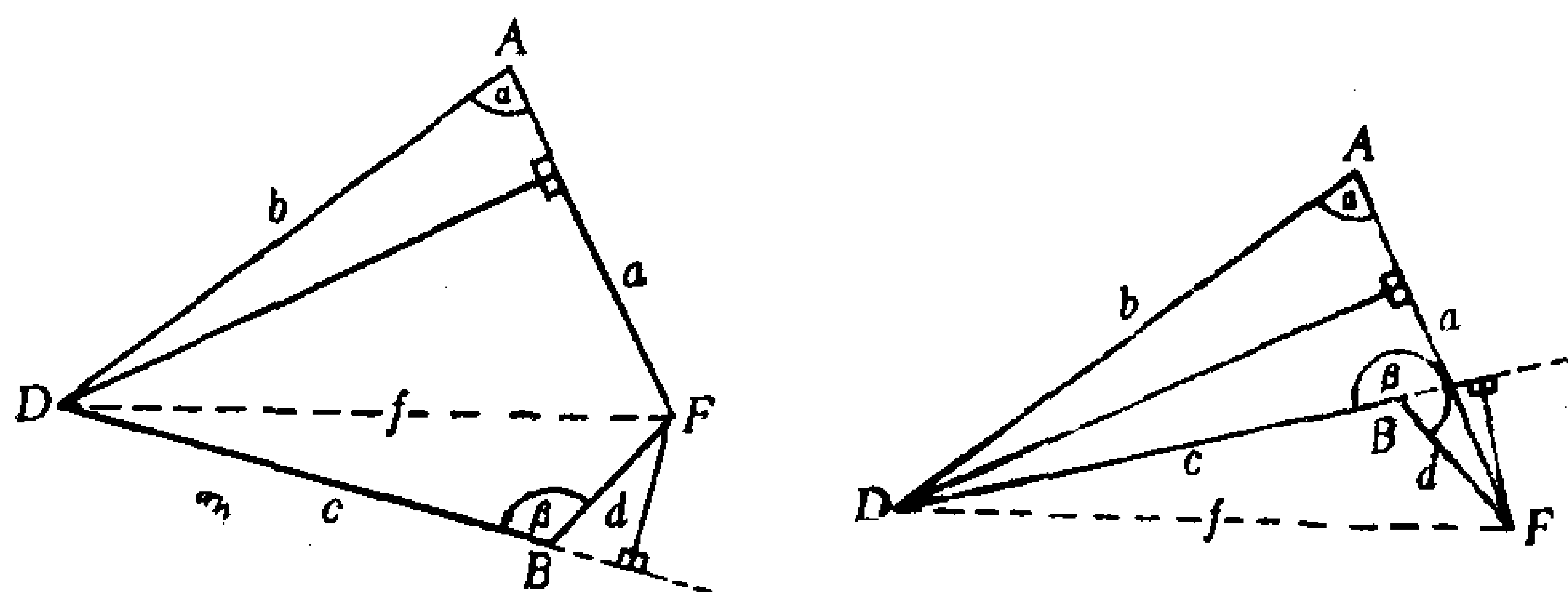


图 2.10

证明 我们首先推导用四边形的边长和两个对角来表示它的面积的公式。设四边形的边长依次是 a,b,c 和 d，面积是 T，周长是 P。假设前两边的夹角是 α，其余两边的夹角是 β。设 f 是"隔开" α 和 β 角的对角线的长度。于是，因为三角形 ADF 在 D 点的高是 $b\sin\alpha$，三角形 DBF 在 F 点的高是 $|d\sin\beta|$（其中当 $\pi<\beta<2\pi$ 时 $\sin\beta$ 为负，见图 2.10），

所以 $$2T=ab\sin\alpha+cd\sin\beta,$$

由此可得

$$4T = 2ab\sin\alpha + 2cd\sin\beta$$

和 $$16T^2 = 4a^2b^2\sin^2\alpha + 8abcd\sin\alpha\sin\beta + 4c^2d^2\sin^2\beta.$$

由余弦定理知

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = f^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

或 $$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta$$

和

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4a^2b^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\alpha\cos\beta + 4c^2d^2\cos^2\beta.$$

把 $16T^2$ 和$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 相加，我们就得到公式

$$16T^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$+ 4c^2d^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) - 8abcd(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta).$$

但是对任何 x 和 y 有

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

和 $$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

因此

$$16T^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$
$$= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha + \beta). \qquad (10)$$

如果我们暂时假设 a, b, c 和 d 固定，则从（10）可见当 $\cos(\alpha+\beta)$最小时，即当 $\cos(\alpha+\beta) = -1$时，T最大。因此，当 $\alpha+\beta=\pi$时，T最大。如果$\alpha+\beta=\pi$，我们可考虑边长为a, b, c和d的四边形内接于一个圆（见图2.11）；例如，考虑由顶点A, B和C决定的圆。对于一切在圆上而不在弧 ABC 上的点D，$\alpha+\beta=\pi$。如果D在圆内，则 $\alpha+\beta>\pi$；如果D在圆外，则 $\alpha+\beta<\pi$

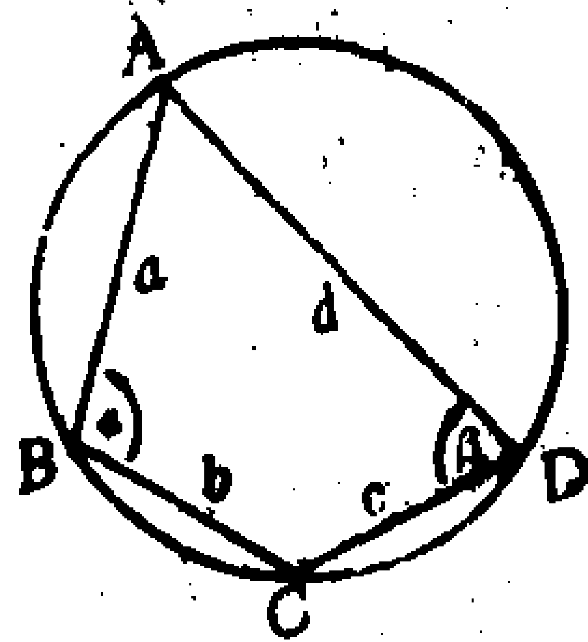


图 2.11

(我们假设D不在弧ABC上)。于是我们已经证明了:

定理14 当边长给定的四边形能够内接于一个圆时有最大面积。

还需完成定理13的对偶定理的证明，也就是说，还需证明：在具有给定周长P，其对角和为π的所有四边形中，正方形有最大面积。现在，虽然我们保持P不变以及$\alpha+\beta$的和等于π，但我们允许四边形的边长变化。当然，这意味着也允许外接圆的半径变化。当$\alpha+\beta=\pi$时$\cos(\alpha+\beta)=-1$，我们可把方程(10)改写成如下形式

$$\begin{aligned}16T^2&=4(a^2b^2+c^2d^2)+8abcd-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\&=4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\\&=[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&\quad\times[2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]\\&=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]\\&=[a+b+c-d][a+b-c+d]\\&\quad\times[c+d+a-b][c+d-a+b]\end{aligned}$$

或 $$16T^2=(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d). \tag{11}$$

这个结果应当使我们马上想起赫伦公式并且强烈地启发我们应用算术和几何平均值定理(定理8)。我们这样做了以后，就得出不等式

$$[(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d)]^{1/4}\leqslant\frac{P-2a+P-2b+P-2c+P-2d}{4}$$

或 $$2T^{1/2}\leqslant\frac{P}{2}.$$

如果 $$P-2a=P-2b=P-2c=P-2d,$$

也就是说，当且仅当$a=b=c=d$时，等号成立。于是，如

果我们固定P，则当内接四边形是正方形时，T最大。所有的正方形是相似的；所以根据对偶性，如果我们固定T，则当四边形是正方形时，P最小。▎

在1.2节中，我们曾把定理8用来证明在具有给定表面积的所有三维盒子中，立方体的体积最大。对偶定理是：在具有给定体积的以矩形为底面的所有直棱柱中，立方体的表面积最小。利用它与定理13，我们能够证明一个有关四边形棱柱的更一般的命题。四边形棱柱定义如下：设Q和Q'是位于两张相异的平行平面上的两个全等四边形，又假设Q和Q'的对应边平行。**四边形棱柱**就是由Q和Q'以及连接Q和Q'的对应点的所有直线段构成的立体。如果这些直线段垂直于Q和Q'的平面，则称该棱柱为**直棱柱**。否则称它为**斜棱柱**。Q和Q'称为棱柱的底面，它们平面间的距离称为棱柱的高。棱柱的体积等于它的一个底面的面积乘以它的高。

定理15 在具有给定体积的所有四边形棱柱中，立方体的表面积最小。

证明 设给定表面积为S的任一四边形棱柱P。无论我们把P作成什么样子，总保持它的体积V不变。证明有三个主要步骤：

（1）固定P的底面，我们把它变形成一个直棱柱（见图2.12）。

（2）固定它的底面积A，我们把底面为四边形的直棱柱变形，使它成为一个底面为正方形的直棱柱。

（3）最后，我们把底面为正方形的直棱柱变形，使它成为一个立方体。

现在，如果一个直棱柱和一个斜棱柱有公共底面和体积，则直棱柱有较小的表面积。这之所以对，是因为两个棱

柱有相同的高，比如说是 h，但因直棱柱的每个侧面是高为 h 的矩形，而斜棱柱对应的侧面却是与矩形有相同的底边，高至少是 h 的平行四边形(见图2.13)。仅当给定的棱柱 P 已经是直棱柱时，对应的侧面面积才成对地相等。因此第(1)步不能增加 S。如果给定的棱柱 P 不是直棱柱，则第(1)步实际上将减小 S。

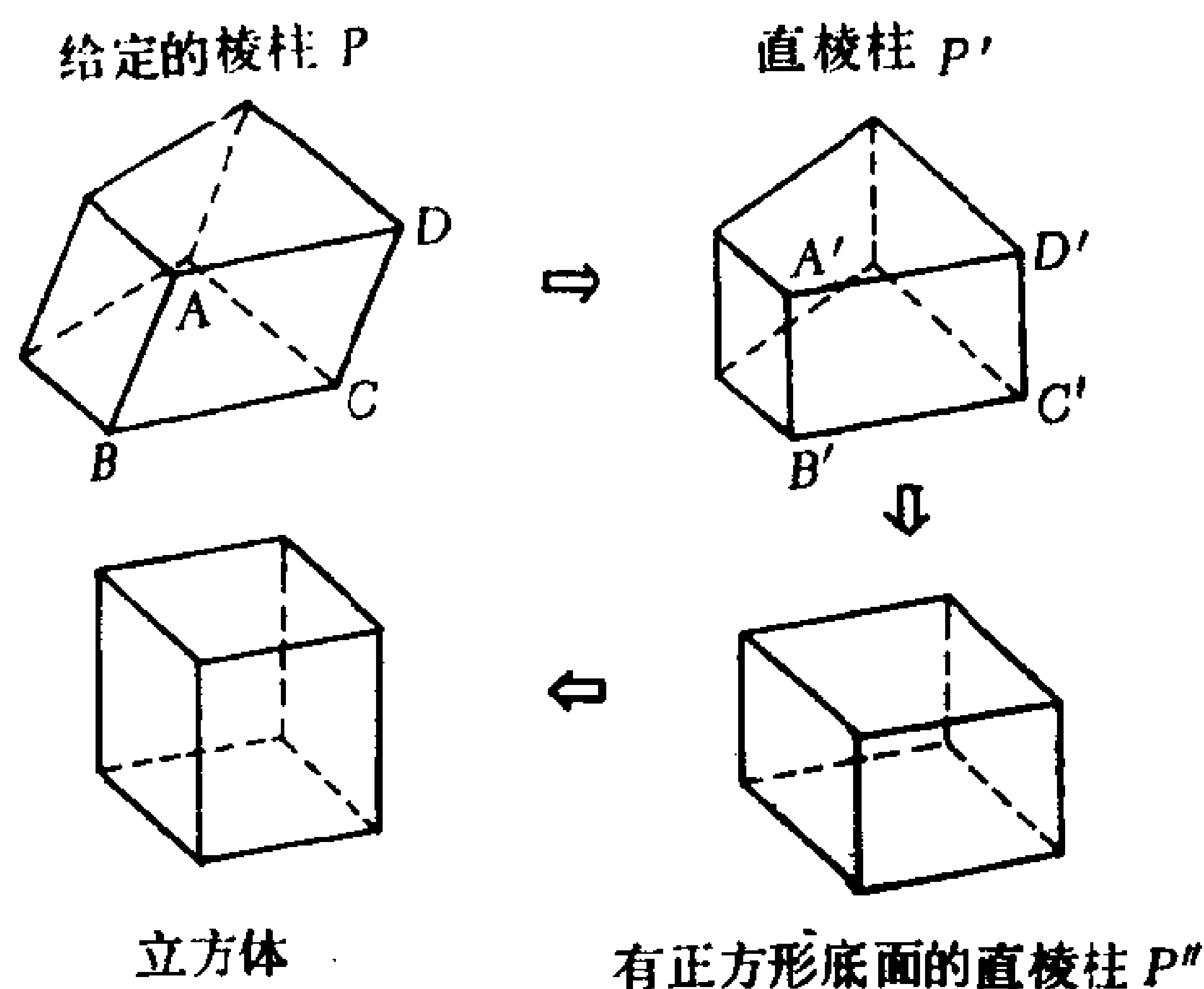


图 2.12

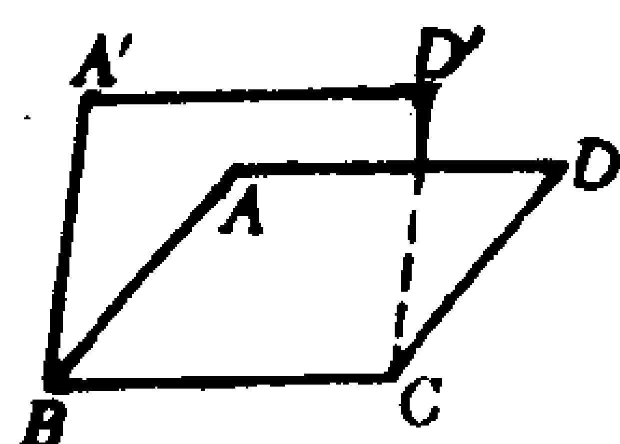


图 2.13

在第(2)步中由于直棱柱的底面积和高都保持不变，又由于直棱柱侧表面积等于它的高乘以它的底面的周长，第(2)步仍然不能增大 S 就是定理13的一个结果。除非直棱柱的底面是正方形，第(2)步的结果实际上是使 S 减小。

最后，根据第50页上叙述的对偶定理，第(3)步也不能增大 S，而且除非底面为正方形的直棱柱已经是一个立方体，实际上 S 将要减小。所以，除非 P 是一个立方体，否

则，至少在P的三次变形的某一步中，实际上S要减小。▎

问题15. 给定一个盒子(把长方体去掉一个面)的五个面的面积之和，求有最大可能体积的盒子。

问题16. 一个盒子的围长是它的宽的两倍加上它的高的两倍。在围长与另外一条棱的长度之和不超过L寸的所有盒子中，哪一个有最大的体积？

一个经常寄邮包的人如果熟悉这个问题的解答，他就会做得更好些。

问题17. 给定一个盒子的棱的长度之和．证明在所有这种盒子中，立方体的体积和表面积最大。

问题18. 假设在体积为V的所有四面体中，存在表面积最小的四面体。证明正四面体就是这个四面体。

问题19. 可以把由两个全等的正方形底面彼此重迭的棱锥构成的八面体称为底面为正方形的双棱锥。证明在体积为V的所有底面为正方形的直双棱锥中，正八面体有最小的表面积.把定理推广到所有底面为正方形的双棱锥的类上去。

我们已经证明了对于三角形和四边形的等周定理，这很可能会促使我们相信，对五边形、六边形，甚至一般地，对多边形也能够证明对应的定理了。然而，遗憾的是，如果不用等周定理本身或它的等价定理，似乎现在还是不行的。

在我们继续进行下去之前，仔细地定义什么是*平面多边形*可能是很有好处的．一个平面多边形是由位于同一平面内的有限条直线段构成的图形.这些线段称为多边形的边，而它们的端点称为多边形的顶点。一个平面多边形用以下条件来定义：每个顶点必须至少是两条边的端点，而且位于不止一边上的点只能是顶点．如果平面多边形的每个顶点恰好是两条边的端点，则这个平面多边形称为*简单平面多边形*。我们

所要考察的多边形都是简单平面多边形。我们将继续把简单平面多边形简称为多边形。一个多边形之内的区域称为它的内部。人们常把多边形和它的内部一起称为多边形。

定理16 给定一个各边长度不全相等的n边形，则必能作出一个与它有相同周长，各边长度全相等，且面积更大的n边形。

下面给出这个定理的一个错误的证明，这是作者构思出来的，并且还一度被它给骗了。它的基础是定理12。请仔细地读一读它，并且看看你们是不是能发现什么地方不正确或者不完整。

证明 设给定的n边形G有周长P。由于它的边长不全是P/n，它必然至少有一条边的长度大于P/n，有一条边的长度小于P/n。我们的第一个任务是说明我们可以假设这两边相邻。在我们这样做过之后，把定理12的证明稍加修改，就能完成证明了。

假设G有一对不相邻的边，其中一条比P/n长，一条比P/n短。那么，必然存在k ($k\geqslant1$)条顺序相接的长度为P/n的边，它们把这一对边分隔开。设短边是AB，长边是XY。如果线段AC落在G内，我们以AC的垂直平分线作镜面来反射三角形ABC，从而得到一个新的n边形$AB'CD\cdots$，它与G有相同的边和相等的面积(见图2.14)。如果AC不在G内，那么我们首先用直线AC反射三角形ABC，而得到一个与G有相同的边但面积更大的n边形。AC将落在新的n边形内部，现在我们再和前面一样，关于AC的垂直平分线作反射。其次我们用B'，C，D分别扮演A，B，C的角色重复这个过程。恰好经过k次这样的步骤后，我们将得出一个与G有相同的边，至少与G面积相等的n边形，而且它有

一对邻边，其中一条比 P/n 短，另一条比 P/n 长。分别把它们称为 AB 和 BC。我们可以假设 AC 在 n 边形的内部。

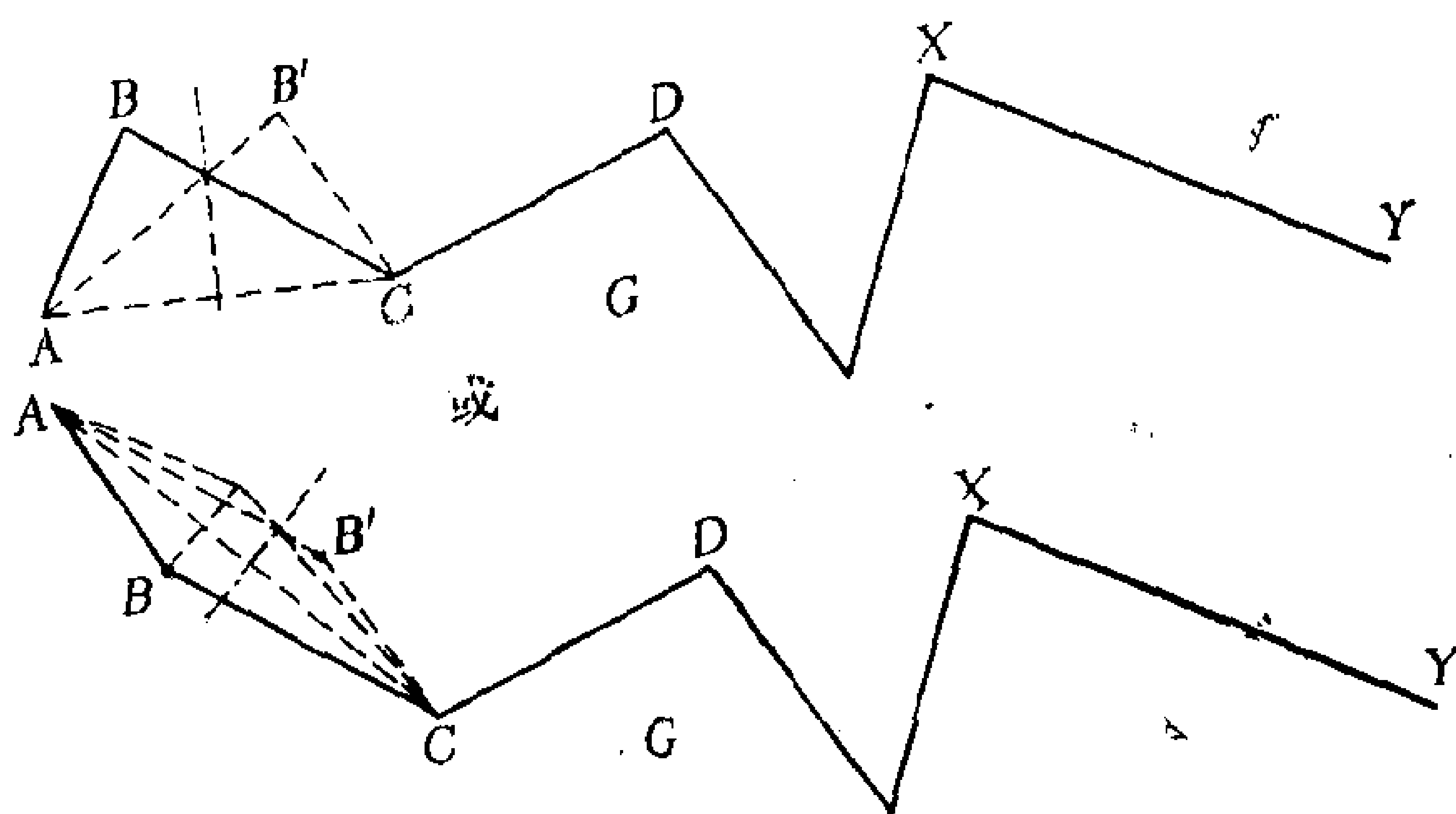


图 2.14

现在作 $AB'C$，使 $AB'=P/n$ 以及

$$AB'+B'C=AB+BC,$$

我们证明 $\triangle AB'C$ 的面积 T' 大于 $\triangle ABC$ 的面积 T。

由图可知

$$AB'+B'C=AB+BC$$

以及 $$AB<AB'=\frac{P}{n}<BC.$$

所以 $$BC-AB>BC-AB'.$$

此外，

$$B'C=AB+BC-AB'<AB+BC-AB=BC.$$

最后， $$BC-AB>BC-AB'>B'C-AB'.$$

利用赫伦公式（见第32页(7)），我们得出

$$16T^2=[(AB+BC)^2-AC^2]\cdot[AC^2-(BC-AB)^2].$$

为比较 T 和 T'，我们注意对两个三角形来说，第一个因子是一样的，而按最后的不等式，三角形 $AB'C$ 的第二个因子

比三角形ABC的要大；因而$T'>T$。所以，n边形$AB'C\cdots$的面积比n边形$ABC\cdots$的面积大。根据作图法，两个n边形有相同的周长。

如果重复这个论证，最多$n-1$次，我们就得到了一个周长为P，各边全相等的n边形。它的面积比G的面积大。 ▎

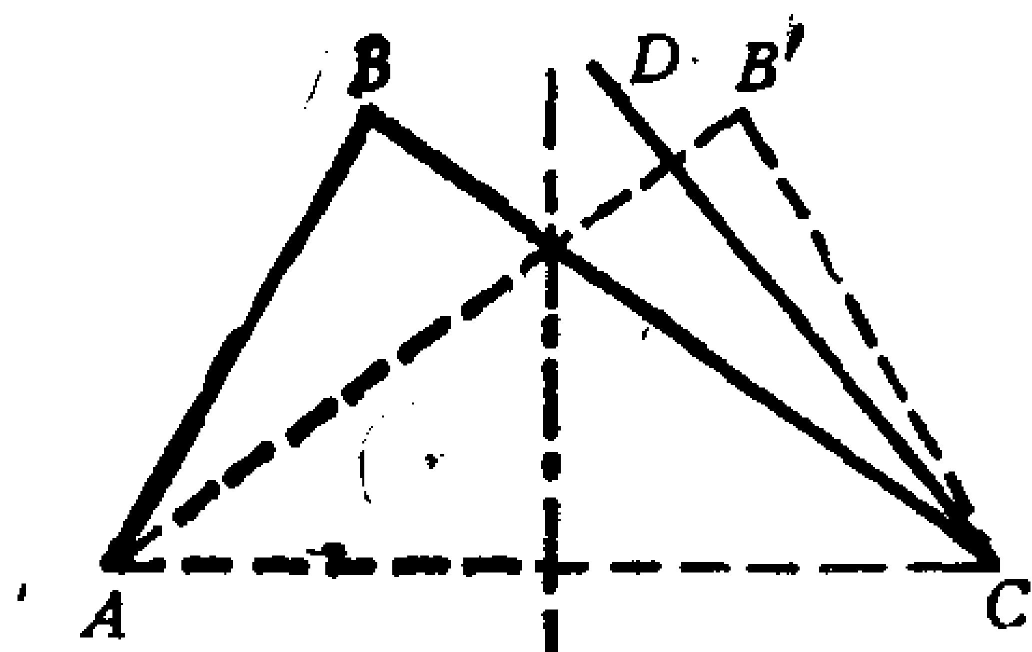


图 2.15

这个"证明"的错误出在反射这一步。例如，完全有这种可能性：当三角形ABC关于AC的垂直平分线作反射时，AB'和CD必相交(见图2.15)，但这是我们不允许的。如果G是凸的，这种反射才能毫无困难地进行。

定义 5 如果联接图形中任何点对的所有直线段，完全位于图形之内，该平面图形就是**凸的**。

如果一个图形不是凸的，则在图形中至少存在一对点，使得联接它们的直线段，除端点外都位于图形之外。

如果G不是凸的，人们也许希望能够用有限次下述形式的反射运算，来得出另一个凸的n边形，它与G有顺序相同的同样的边，而且比G的面积大。假设联接G的不相邻二顶点(比如说A与B)的线段上，除A与B外，其余所有的点都位于G之外。一个反射运算就是把位于A，B之间的G的边界部分关于AB作反射(见图2.16)。

问题。给定一个n边形G，能不能通过有限次反射运算，作出一个和G有同样顺序的相同的边的凸n边形G'？

定理16可以这样证：或者证明上面问题的回答是肯定的(它也确实如此)，或者利用以下的论证法。用直线段联接G的

每一对端点。抹去那些位于某一多边形内部的线段。余下的线段构成的凸多边形称为G的凸包。很清楚，除非它与G重合，否则它比G有较小的周长以及较大的面积。现在，对于与G的凸包相似的周长为P的多边形，可用上述错误证明中

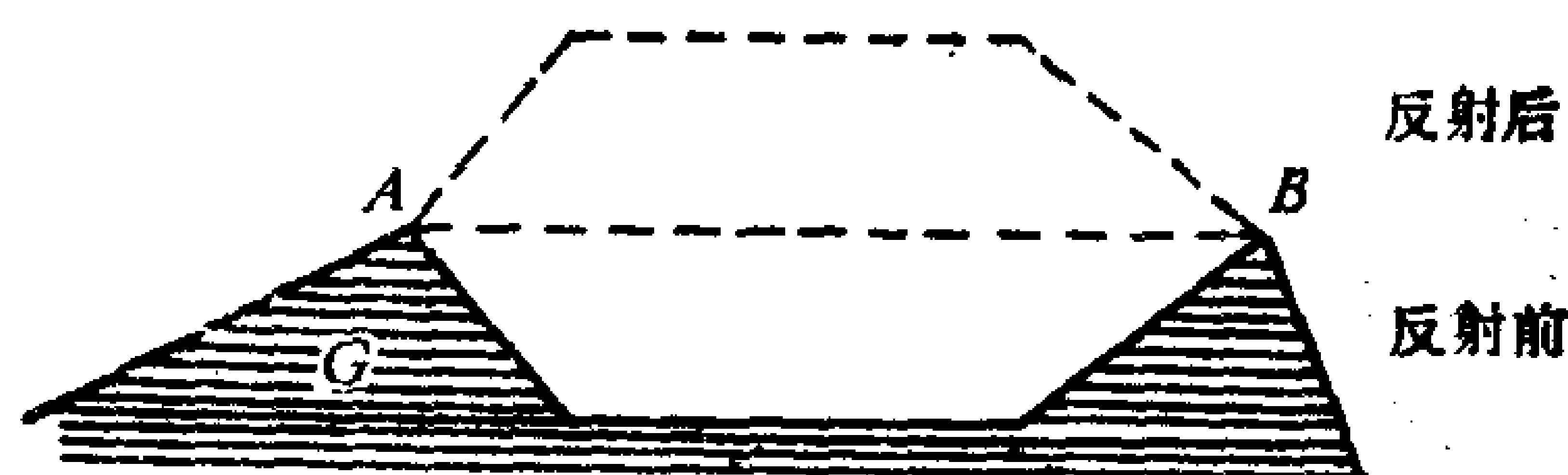


图 2.16

所用的方法作变形，因而定理16得证。对于这个证法，人们可能会持异议的仅仅在于，G的凸包的边数可能会比n少。但是，在边的内部添加几个假顶点，就能把这个凸包看作一个n边形了。

另一个不太容易证明的定理是：在具有相同周长并且各边全相等的所有n边形中，正n边形的面积最大。但我们能够解决下面这个问题。

问题20。证明一个圆比与它周长相同的正n边形有更大的面积。

提示 在正n边形中内接一个圆。假设它的半径是r，而n边形周长为P，面积为A。证明

$$A=\frac{P^2r^2}{4A}<\frac{P^2}{4\pi}.$$

因为，如果我们能够证明这个定理，那么利用问题20的结果，我们就能证明：圆比与它周长相同的任何n边形有更大的面积。这将是一个重大成就。

论证如下。设S是任一多边形，又设C是与S有相同周

长的圆。按定理16，我们可作第二个多边形S'，它各边的长度全相等，周长是P，而面积T'大于S的面积T。如果周长为P的正多边形S''有面积$T''>T'$，则由问题20的结果知，C的面积大于T''，所以也大于T。如前所述，这个论证中的“如果”并不容易去掉。

2.4 斯坦纳的尝试

在叙述斯坦纳证明等周定理的一个尝试之前，我们应当强调几点，它们包含在我们已经给出的对多边形的等周定理的每个证明当中。

第一点，我们的证明始终是构造性的；也就是说，在一个定理的证明中，我们从来没有用过这样的论证法：如果这个定理是错误的，必将由此推出和定理的假设相矛盾的一个结论，所以定理必然是正确的。基于这种论证法的证明常常被称为间接证明。间接证明是非构造性的。我们的问题是，要表明某图形是某类图形中的一个极端图形，也就是说，它的面积(或者无论哪一种被考虑的性质)大于或小于同一类中任何别的图形的面积(或者被考虑的性质)。借助几何作图法，我们总能证明被猜想的极端图形确有要求的性质。

第二点，重要的是应当认识到并不总是能够给出这样一个显式的证明的。实际上，在允许图形类中可以不存在极端图形。仅仅证明任何不是假设的极端图形的图形都能够得到改进，对于完成假设的极端图形就是事实上的极端图形的证明来说，这还不是一个充分的论证。还有，尽管我们很想得出某个问题的解答，但是也许我们并不见得能够猜出它的解来。让我们考虑一些特别的例子来解释这段话。

问题。在形如$1/n(n=1,2,3,\cdots)$的分数中，哪一个最

小？

设想的解答．对每一形状是$1/n$的分数，除分数$1/1$外，都存在另一分数$1/n^2$，它有同样的形式，但却更小；即

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}, \quad n>1.$$

因此，在给定的分数集合中，$1/1$是最小的分数．❙

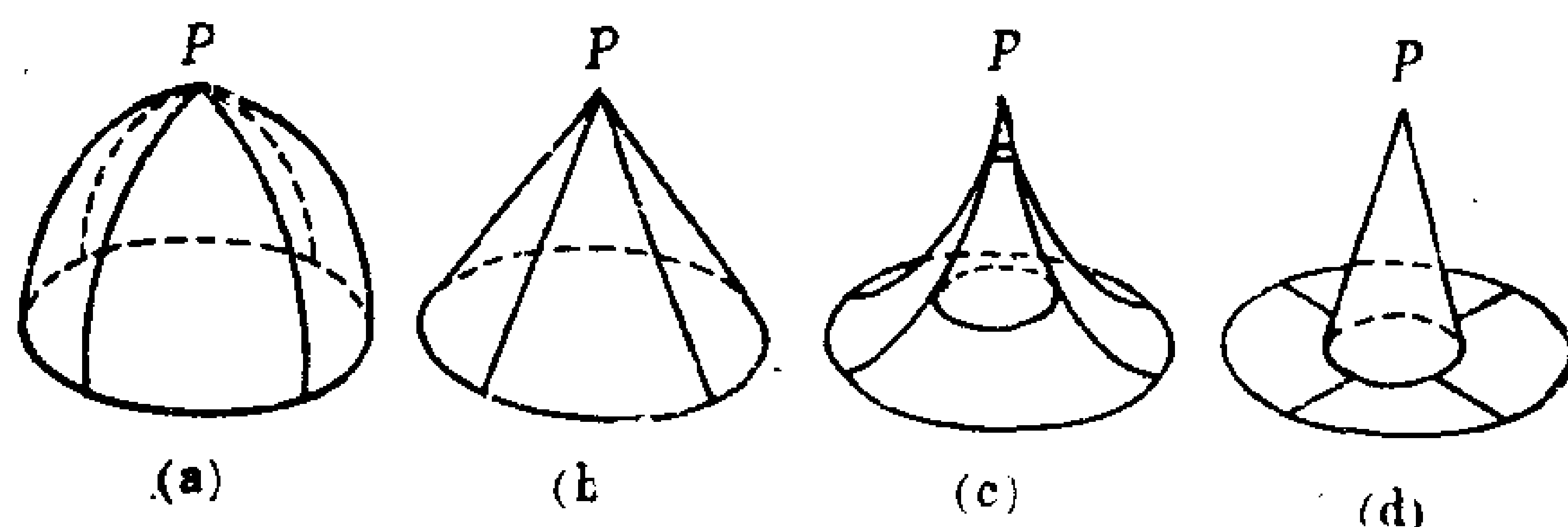
这个解答显然是错误的；事实上，在给定的类中不存在最小分数．尽管我们已经找到了一个数，对于平方运算来说，它在允许的数中是仅有的不会减小的那一个．可以想象，对我们能想到的所有其它的运算它也有这种性质．但是，正如我们刚才看到的，对于证明“在允许的数中，1是最小数”来说，这是不充分的．

问题．在同时满足以下三个条件的所有曲面中，哪一个表面积最小：

（A）由半径为1的水平圆盘的周线C围成；

（B）通过圆盘中心上方1个单位处的P点；

（C）不存在与曲面相交多于一点的垂线．



(a) 半球面　(b) 正圆锥的一段　(c) 一种想象的管乐器　(d) 女巫的帽子

图 2.17

在图2.17中画出了几种可能的曲面．记住，圆盘不是它们任何一个的一部分．这一次仍然不存在极端图形．为证明

这一点，首先注意最小曲面(如果它存在的话)的面积必然大于圆盘的面积π。但是给定了满足三个特定条件的面积为$S=\pi+h$的任一曲面后，我们能够作一个由顶点为P，底面位于C所围成的圆盘中的瘦的“冰淇淋形锥”与圆盘的位于锥底之外的部分构成的曲面，并使得这个曲面的面积比$\pi+h$小(见图2.17(d))。因为，设锥底的半径是r，那么，曲面的面积就是环形①面积$\pi-\pi r^2$与冰淇淋形锥的面积$\pi r\sqrt{r^2+1}$之和$\pi-\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+1}$。此外，取$r$足够小，当然能使$\pi r\sqrt{r^2+1}-\pi r^2$(它等于$\pi r(\sqrt{r^2+1}-r)$)小于$h$。如果我们去掉条件(B)，这样就扩大了允许曲面的类，那么在新的曲面类中就有最小曲面——圆盘．因此，有时我们能够放宽允许图形的类，从而解决一个原先不存在极端图形的问题（就象在上面例子中和在等周定理的情形中，用面积为T的任何图形来代替面积为T的任何多边形一样)；有时，通过限制允许图形的类，我们也能做同样的事情(如对等周问题的情形，限于用三角形来代替一般的面积为T的多边形)．

或许你们已经注意到了，我并不把极端图形不存在的问题看成是“无解问题”或“无答案问题”．在这种情形下，我宁愿说要求的那种极端图形不存在，然而，正是由于知道了这一点，所以说问题已经被解决了．

注 或许读者知道，只考虑表面张力，在一个细框架上形成的肥皂膜所取的形状，就是在一切由该框架围成的曲面中，面积最小的曲面的形状。有关肥皂膜和极小曲面的有趣的讨论，可阅读柯郎德和罗宾斯所著《数学是什么？》②

---

① 环形是由两个同心圆围成的平面图形，也就是中间有一个圆洞的圆。

② Courant and Robbins, What is Mathematics? Oxford University Press, New York, pp. 385—397, 1941,

一书。

我们的直观并不总是给我们提供正确的启示。对下面这个问题，答案可能是什么，你是怎么想的？在你作出猜测之前先画几个图形看看。

问题． 在有以下性质的所有闭曲线中，哪一条曲线包围的面积最小？人们可以在曲线中移动单位长度的线段，使它作360°的完全旋转；或者用通俗的话来说，使一辆单位长度的超级流线型汽车能够在其中转动一圈的面积最小的停车场（或者这样的停车场之一，因为可能有很多形状不同而面积相同的最小停车场）是什么形状的？

单位直径的圆是一种可能的曲线。是不是有包围着更小面积的曲线也能做这件事情呢？A·S·贝塞科维奇（Besicovitch）能够证明包围最小面积的这种闭曲线不存在，更令人吃惊的是，他证明了对任何正数 p，无论它多么小，都存在具有要求性质的闭曲线，它所包围的面积小于 p 个平方单位面积！人们能够移动1个单位长的线段，使它转动整圈，但在这个过程中仅仅扫过1/10个平方单位的面积。如果我们有非常精密的仪器，我们就能够只用 10^{-10} 个平方单位的面积来做这件事情！

如果我们对图形加上是凸的条件来限制允许图形的类，那么就存在一条极端曲线。它是高为1个单位的等边三角形（见图2.18）。关于这个问题和很多其它有关凸图形的有趣的问题的解答和讨论，请读者阅读苏联数学家亚格龙和波尔特杨斯基所著的《平面凸图形》① 一书。

等周定理证明中的困难与上面引用的例子中的困难是同

---

① I.M.Yaglom and V.G.Boltyanskii, Plane Convex Figures, 英译本由Holt, Rinehart, and Winston, Inc., New York, 1961年出版。

样的，只是在这种情形下确实存在着极端图形。要证明对于不是圆的任何平面图形，有另一个与它周长相同但面积更大的图形存在，相对来说是容易的。不过就证明等周定理来说这

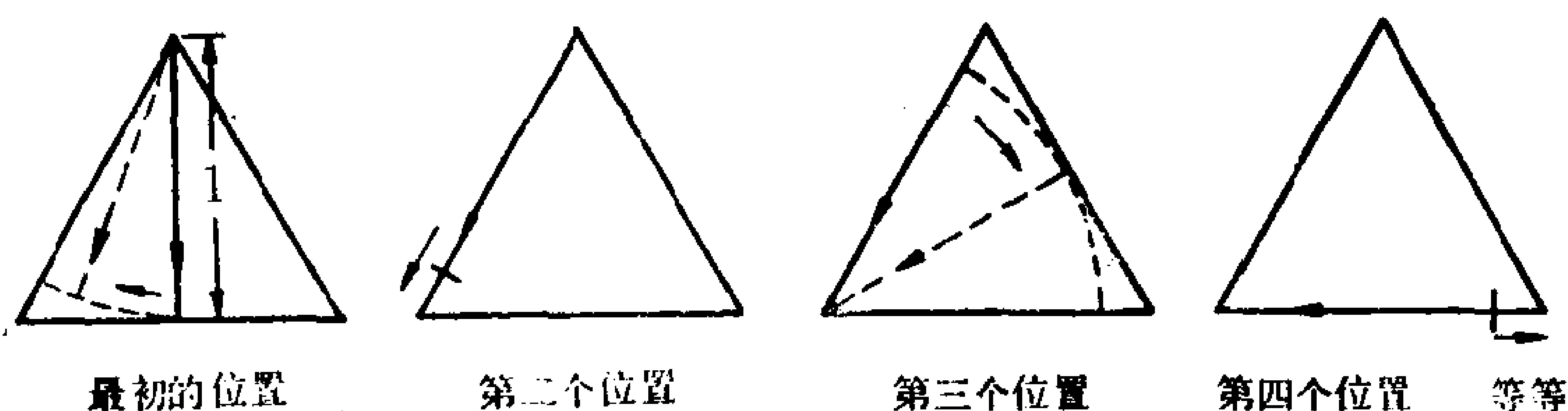


图 2.18

还是不够的。这个论证告诉我们的仅仅是：如果存在一个图形，它比与它周长相同的任何其它图形的面积更大，那么它必然是圆。完全可以设想这种极端的图形根本不存在。斯坦纳不相信我们现在正在讨论的这个问题会是一件很严重的事情。因为，毕竟等周问题确实存在一个解，而且就是圆，从几何直观来看是很显然的。对现代数学，幸亏维尔斯特拉斯相信，由于他提请人们注意这一点，他已经对斯坦纳关于等周定理的证明郑重地提出了异议；而且事实上，他相信他的论证已经使斯坦纳的证明（还有别的定理的其它证明）失效了。他用非构造性的方法给出了一个等周定理解的存在性的证明，从而克服了他自己的异议。还沒有人发现一种简单的几何论证，可证明圆比与它周长相同的其它图形面积更大，而且也沒有找到这种方法的希望。等周定理的所有的证明都用非构造性的方法表明：面积最大的图形确实是存在的。

尽管斯坦纳沒有证明等周定理，但在试图证明它时，他所用的推理却是优美而巧妙的。我们现在来考察他的一个尝

试性的证明，并证实：对于不是圆的任一平面图形，存在另一个面积更大而与它周长相同的图形。

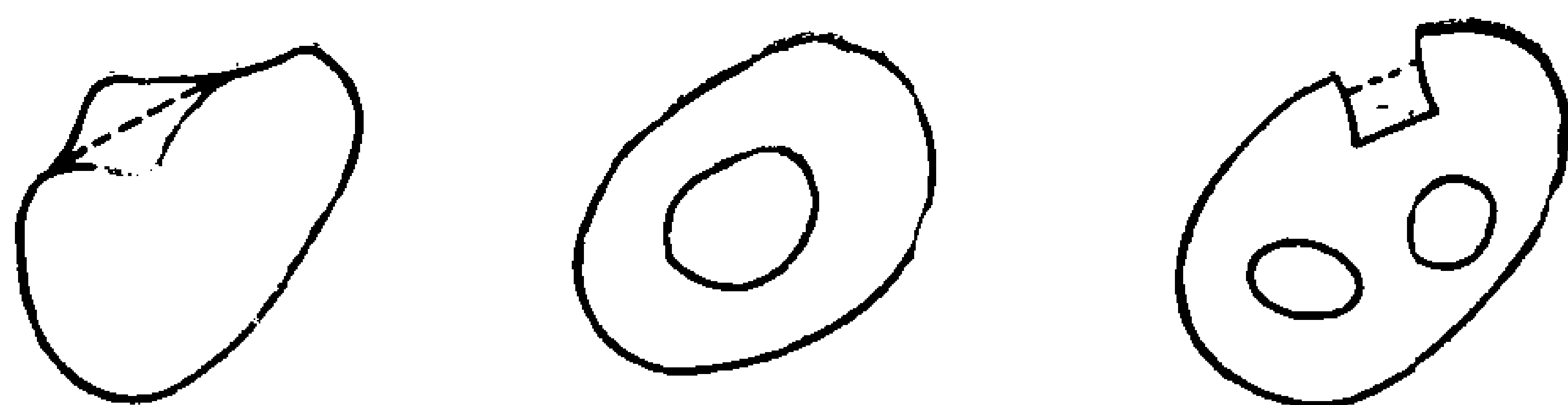


图 2.19

设给定一个周长为P的平面图形，又设它不是圆。如果它不是凸的，我们可如下构作另一个周长为P，但面积更大的图形。我们在图形的边界上取两点使其连线位于图形之外，而且我们把这一直线段和图形之间的面积以直线段为镜面作反射(见图2.19)。我们把原图形加上被反射的面积及其反射作为新图形。这个新图形有与原图形相同的周长但面积更大。这个推理实际上没有照顾到所有可能的情形，如图2.19中所示，但是要照顾到所指出的例外并不困难。请试试看。

如果所给的图形是凸的，我们正好利用定理14。因为图形不是圆，因而在它的边界上必然存在四个点，它们不是内接于圆的某个凸四边形的顶点。考虑以这四个点为顶点的凸四边形。我们假设图形在这个四边形之外的部分（见图2.20中阴影区域）的形状和面积固定不变，而且固连于四边形的边上。我们再考虑在顶点处有活动关节的四边形。根据定理14，如果现在扭歪四边形使它内接于一个圆，那我们就增大了它的面积。新的四边形以及与它固连的原图形的小块一起（见图2.20）确定了一个周长为P，但面积比原图形大的新图形。这就完成了斯坦纳的论证。

问题21. 证明等周定理蕴涵着：在具有同样的边的所有 n 边形中，能够内接于一个圆的那一个有最大的面积。

利用这个问题的结果，我们能够证明：在有相同周长的所有 n 边形中，正 n 边形有最大的面积。

证明 设 G 是一个非正 n 边形。根据问题21的结果，与 G 有相同次序的同样的边并且能够内接于一个圆的 n 边形

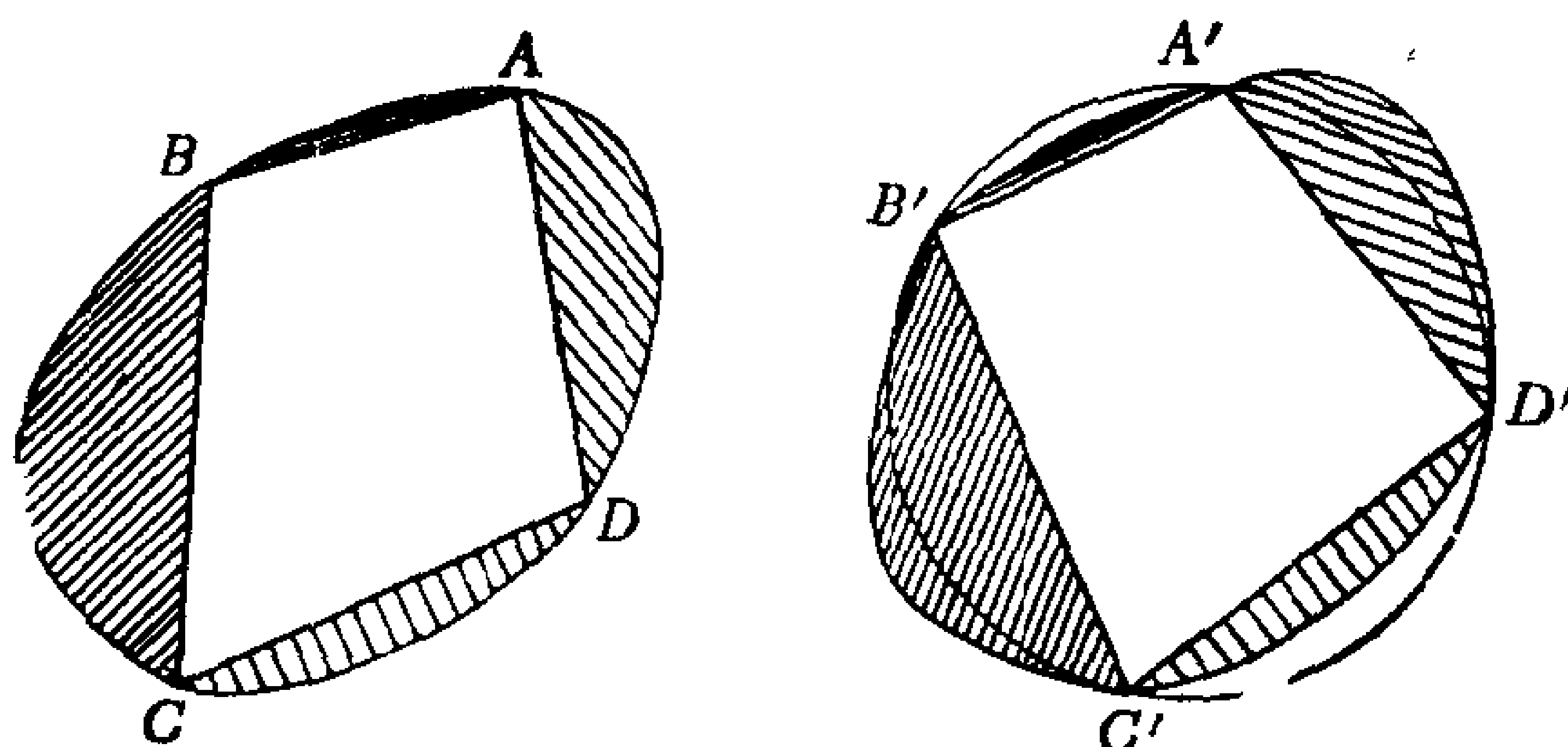


图 2.20

C' 有较大的面积。由于 G' 内接于一个圆，我们可把它的边按照我们高兴的任何次序重排。注意到这个事实，我们就能够用定理16的错误证法的后一半来得到要求的结论。▌

我们还能把等周定理叙述成另一种形式。设 A 表示给定图形的面积，P 表示周长，又假设周长为 P 的圆有半径 r。于是定理等价于不等式

$$A \leqslant \pi r^2;$$

或者，由于 $r = P/2\pi$，

$$\frac{4\pi A}{P^2} \leqslant 1.$$

这个不等式被称为等周不等式。商 $4\pi A/P^2$ 被G·波里亚(Pólya)称为等周商，按照他的称呼，我们把等周商缩写成

“I.Q.”① 并把等周定理叙述成以下形式：**在所有的平面图形中，圆有最大的I.Q.**。

问题22. 计算几个图形的I.Q.，得到的数据是否符合这条定理？

① 通常用I.Q.来表示人的“智商”，因此，这里把等周商缩写为“I.Q.”或许是一种诙谐的说法。——译者

第三章 反射原理

3.1 对称

“对称，尽管你可以规定其含义或宽或窄，然而从古到今它都是人们用来理解和创造秩序、美妙以及尽善尽美的一种思想。”我们时代伟大的数学家之一赫尔曼·韦尔(Hermann Weyl)这样写道①．事实上，基于对称性概念的论证方法乃是数学中最有力量和最优雅的方法之一。在本章中，我们将要考察平面图形所能够具有的最简单类型的对称性，即关于直线的对称性（它把图形分为两部分，每一部分都是另一部分的镜象）在不等式的研究中所起的作用。对称强烈地影响着早期文明的艺术。它在数学中的应用是由希腊人开始的。它引导他们取得了关于正多面体：四面体，立方体，八面体，十二面体和二十面体的奇妙的发现。而多面体的对称性又对所谓代数拓扑学这一现代数学分支的创立起了一定的作用。作为这种观点的一个入门，我极力推荐你们阅读大卫·希尔伯特和柯恩-沃森所著的《几何与想象》②一书。

从美学上看，对称是使人愉快的，而且通过包含反射的作图法，例如，正多面体的作图法，能够发现很多美妙的几何图形（参看希尔伯特和柯恩-沃森的讨论）。但是，和

① 引自他最心爱的书《对称》(Symmetry, Princeton University Press, 1952)。

② David Hilbert and S. Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, Chelsea Press, New York, 1952.

我们经常有机会使用的反射概念相联系的却是一个抽象的数学原理。所谓反射原理这一抽象的发明应归功于赫伦。他发现：从一个平面反射的光线通过光源和接收点之间的最短路径。与这个原理等价的是：由平面反射的射线，其入射角等于反射角。要是你不熟悉这个等价性的证明，下面给了一个证明。

假设A是光源，B是接收点，而m是反射面(见图3.1)。我们首先假设ACB是入射角和反射角相等时的路径，并要证它是从A到m再到B的最短路径。设B'是B关于m的反射。于是$\angle ACX=\angle BCY=\angle B'CY$；所以，$ACB'$是直线段，是从$A$到$B'$的最短路径。但$BC=B'C$；事实上，对$m$上的任何点$P$，$BP=B'P$。也就是说，

$$AP+PB=AP+PB'>AC+CB'=AC+CB.$$

因此，ACB是从A到m再到B的最短路径。这个定理的逆定理可以从全等关系$\triangle BCP\cong\triangle B'CP$和等式$\angle ACX=\angle B'CP$推出。▎

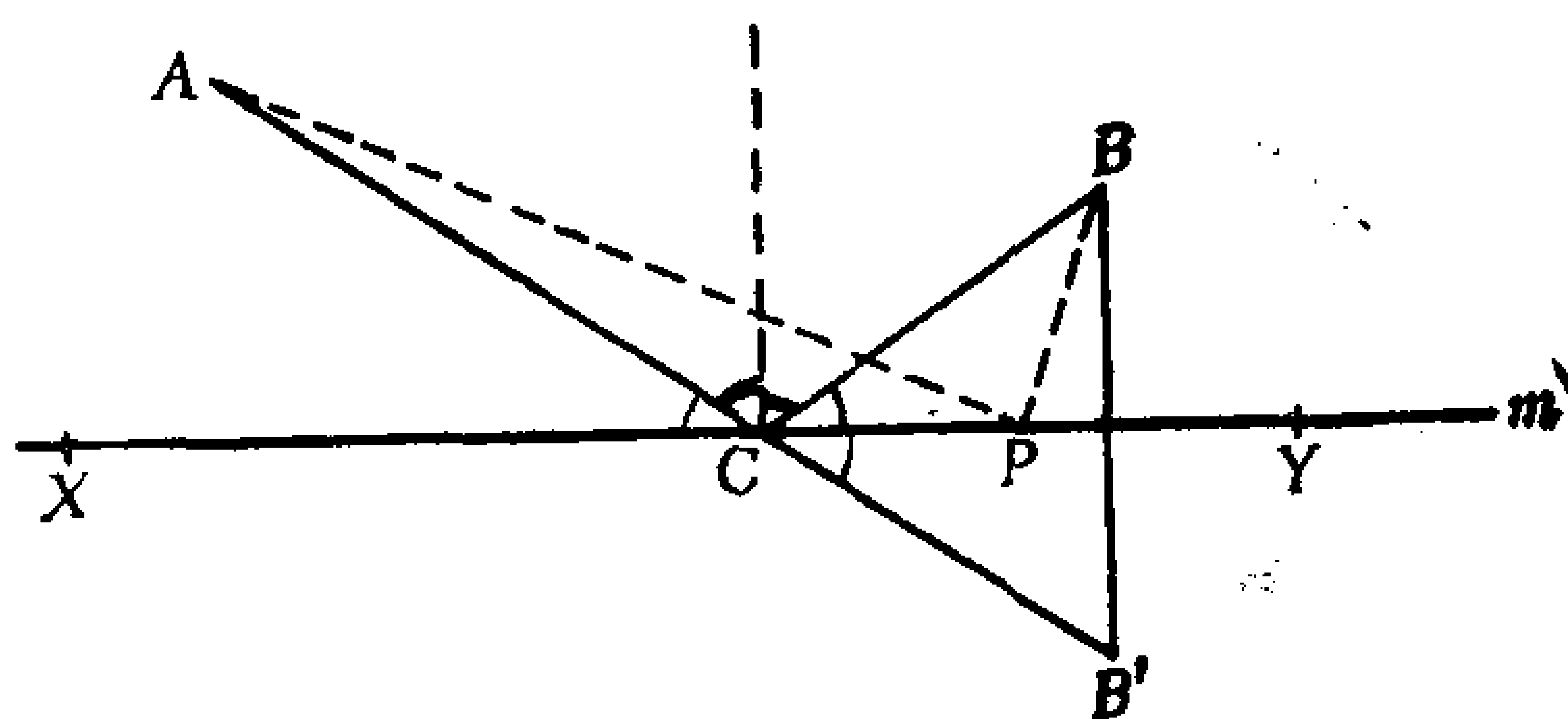


图 3.1

尽管反射原理既简单又显然，但是一旦把它用在正确的地方，它就能够使问题变得清楚，否则问题还是难以理解或者几乎难以理解的。我要试图给出这一事实的若干例证，不

过，首先我们要考察几个以简单反射为基础的思想。

3.2 黛多问题

在等周定理和它的推论方面，斯坦纳使简单反射发挥了巨大的效力.一个推论就是黛多(Dido)问题的解.黛多是蒂瑞安(Tyrian)王的女儿。据传说，她嫁给了她的叔父阿瑟巴斯(Acerbas)，而他由于他的财富被谋杀了。于是黛多带着阿瑟巴斯的财宝逃到了塞浦路斯，并且从那里航行到了西西里附近的非洲海岸。她告诉当地的统治者，她想购买一块大小不超过一张牛皮所能围得住的靠着海岸的土地。他同意了这位美丽的夫人的这个小小的要求，并且慷慨地给了她一大张牛皮。于是聪明的黛多把牛皮切成窄条，并把它们联成一条绳索，以便能够围住一块远比统治者所设想的大得多的土地。如果我们假设海岸是直线，地球是平面，她所碰到的问题就是：能够用一条长度给定的带子以及直线上一段未指定的部分来围住的面积最大的图形是什么？黛多解决了这个问题，多半是由于她的成功，使她变成了迦太基的繁荣的城市的缔造者和女王。

正如我们提到的，黛多问题的解在于反射。如果我们把海岸设想成一面镜子，我们用它来把皮绳围住的区域作反射，她的问题就变成：有一条给定的对称线(海岸)和给定的周长(绳索长度的两倍)的面积最大的图形是什么？因为在具有给定周长的所有图形当中，包含着有一条对称轴的那些图形，又因圆也有一条对称轴，所以等周定理保证圆是所求的面积最大的图形；因此，黛多问题的解是一个半圆形。

问题23. 在由一条长度是L的带子和一条长度是D的棍子($L>D$)所围成的图形中，哪一个面积最大？给出证明。

问题24. 设n边形除去一边之外，其余各边的次序和长度都给定。在这样的n边形中哪一个有最大的面积？证明你的猜测。

问题25. 给定平面的四分之一，在能够用一条长度给定的曲线从它切下的图形中，哪一个面积最大？推广你的结果。

提示　反射几次。

问题26. 把问题23推广到三维空间，并解决这个新问题。

3.3 斯坦纳对称化

假设在具有给定周长的图形中存在面积最大的图形，人们就能够用反射来证明等周定理。斯坦纳发明了几个证法。他的一个想法是：证明最大图形关于把它的周长分成两相等部分的每条直线必然是对称的。

为证明这一点，我们注意到最大图形必然是凸的，因而进一步的讨论限于凸图形。现在，把凸物体的周长分成相等两半的弦就完全落在物体之内。如果有一条这样的弦把物体的面积分成不相等的两半，那么，我们可以拿掉面积较小的一半，而用面积较大的那一半的镜象来代替它。这样我们就得到了一个面积更大而与原图形有相同周长的新图形。这个新图形可以不是凸的。在这种情形下，我们能够把它作成凸的（见2.4节），而增大它的面积并保持周长固定。还要注意一条平分周长的弦有可能把凸物体分成面积相等，但关于此弦不对称的两半。在这种情况下，把哪一半选来作反射是沒有区别的。得到的图形仍然可能不是凸的，但能和上面一样把它作成凸的。因此，如果确实存在着具有给定周长而面积最

大的平面图形，那么它必然关于把它的周长分成相等的两半的每条直线对称，从而它必然是一个圆（最后这个“必然”需要证明）。▎

斯坦纳关于等周定理的另一个证明也基于最大图形在每个方向必有一条对称轴的思想，但与此处的方式不同。为了描述这个想法，我们首先注意有关梯形的一个定理。假设$ABCD$是一个梯形，又设$AB'C'D$是有相同底边和高的等腰梯形；也就是说，假设$AB'C'D$关于AD的垂直平分线对称。改写的反射原理表明：在具有给定的底边和高的三角形中，等腰三角形的周长最小。（见图3.2(d)，这时可把A考虑为光源，D是接收点，而$B'C'$是镜面。）这样一来，$AB'C'D$的面积与$ABCD$的面积相等，而它的周长却小于或等于$ABCD$的周长。

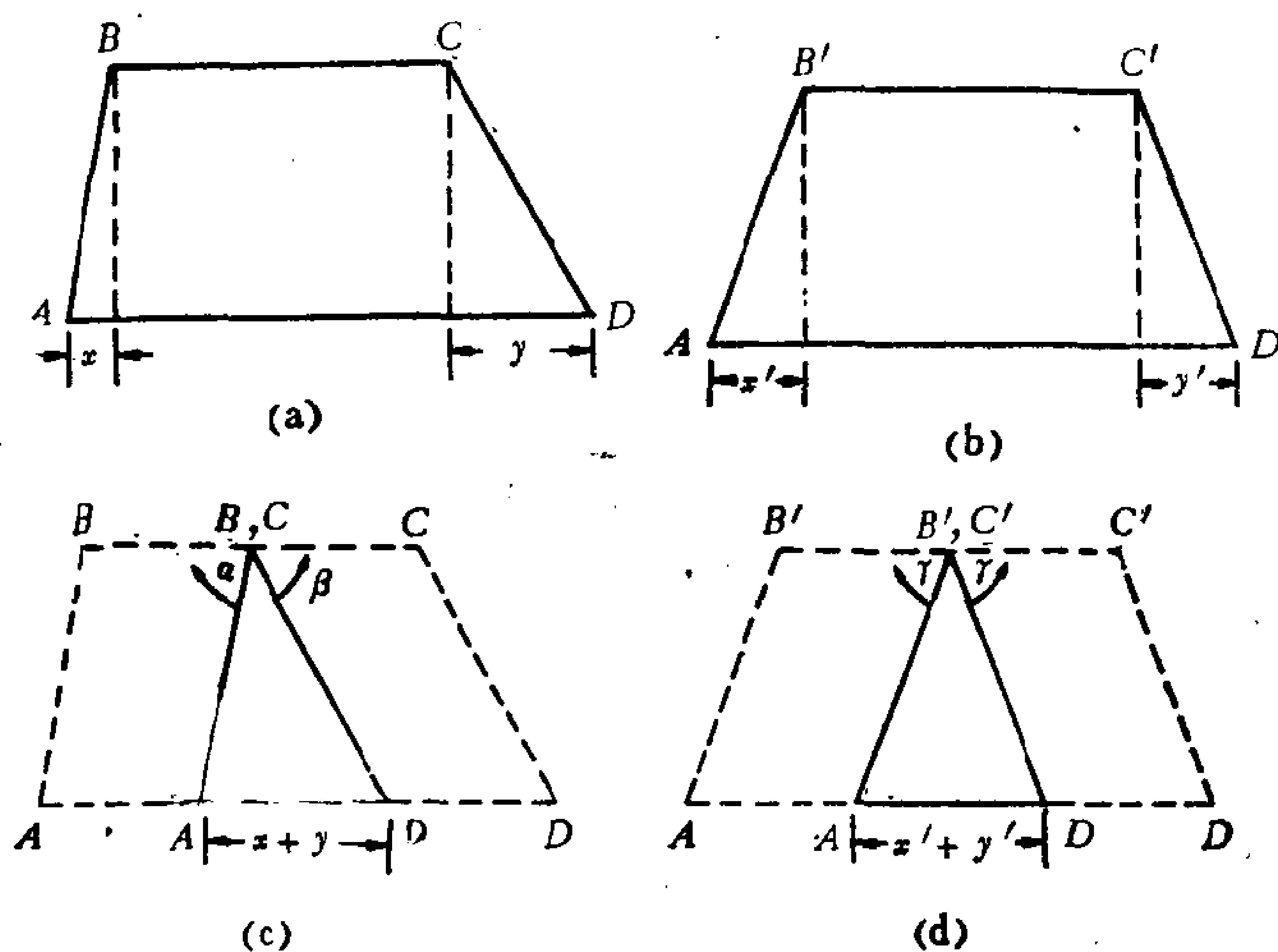


图 3.2

现在，考虑任一凸体(图3.3(a))。我们用平行线把它切成窄条；而且，暂时假设每个条子都是梯形(图3.3(b))。从这些梯形出发，先把每个梯形变成有相同的底边和面积的等腰梯形，然后再排列这些新梯形，使它们有公共的垂直平分线(图3.3(c))，作成一个新的图形。从上述关于梯形的定理推出图形3.3(c)与图形3.3(b)有相同的面积，但有较小的周长。如果我们把原来的凸体(图3.3(a))分成越来越窄的带形，近似多边形(图3.3(b))的面积和周长将趋于原图形的面积和周长。(事实上，人们常常分别用近似多边形序列

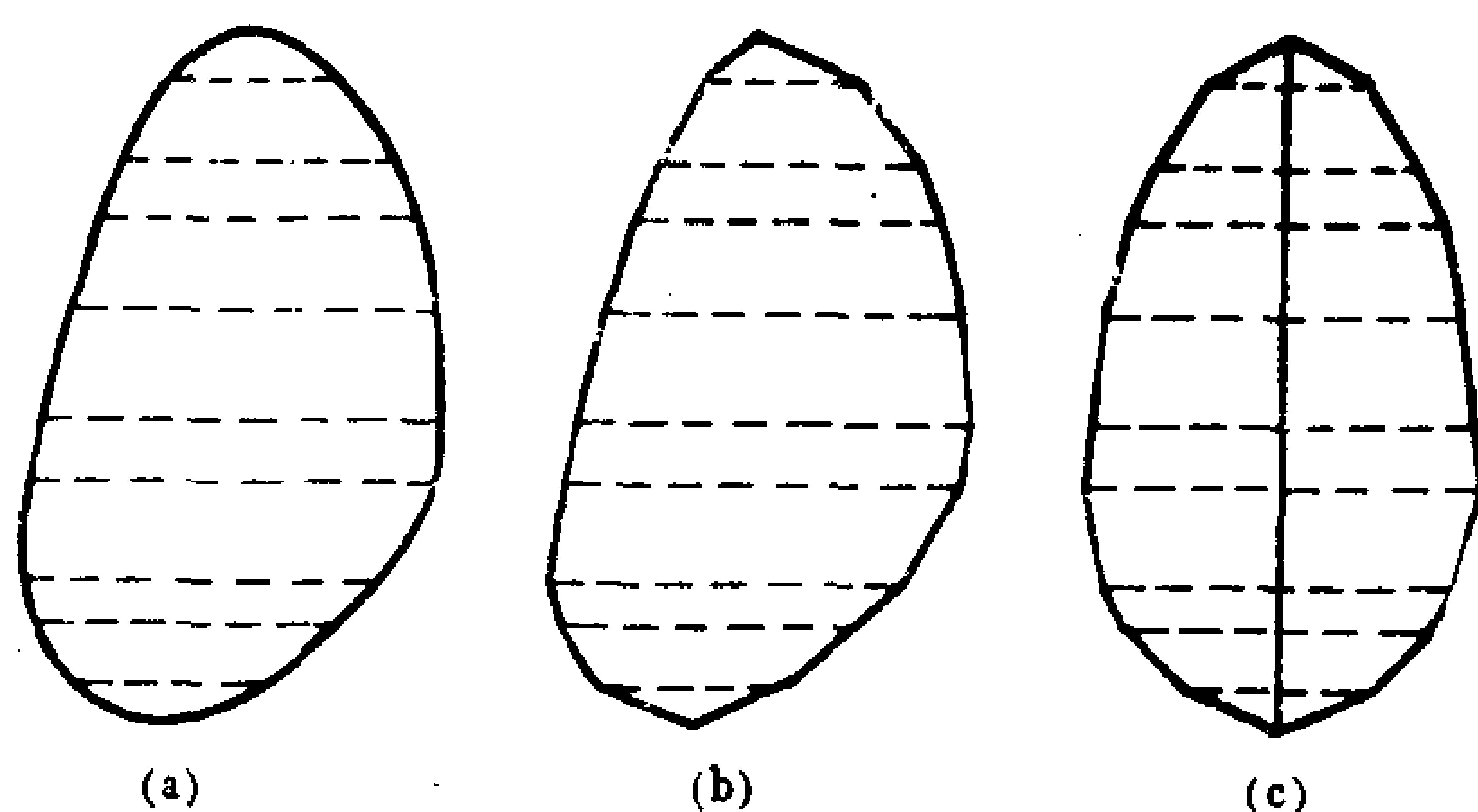


图 3.3

的面积和周长的极限来定义平面图形的面积和周长。)变形后的多边形(图3.3(c))将趋向于有一条对称轴的凸体。因而，给定一个凸体，我们能够作出另一个有相同的面积，周长不增大，而在一个给定的方向上有一条对称轴的图形。(你能证明对称化后的图形确实是凸的吗？)这个对称的凸体可以被看成是通过下面的作图法而得到的。

作图法。在给定的方向上画一条直线，考虑原图形的垂直于所画直线的弦。移动每条这样的弦，使得画出的直线成

为它的垂直平分线。

平移后的弦的端点构成了一个新的对称图形(见图3.4)，它与原图形有相同的面积，但是周长较小．这个作图法称为斯坦纳对称化．它在凸体的理论中起着重要的作用。

现在我们能够完成等周定理的“证明”了。给定一个在某一方向没有对称轴的凸物体，我们对这个图形沿这个方向应用斯坦纳对称化；这样我们就得到了一个面积相同，周长较小的新的凸体．然后我们放大这个新的物体，一直到它的周长与原物体的周长相等为止．因而，如果一个图形在某个方向上没有对称轴，它就不能是所有那些周长相同的图形中面积最大的图形。由此可知，如果最大图形存在，圆就是这个最大图形。(最后一个说法的证明留给读者。)

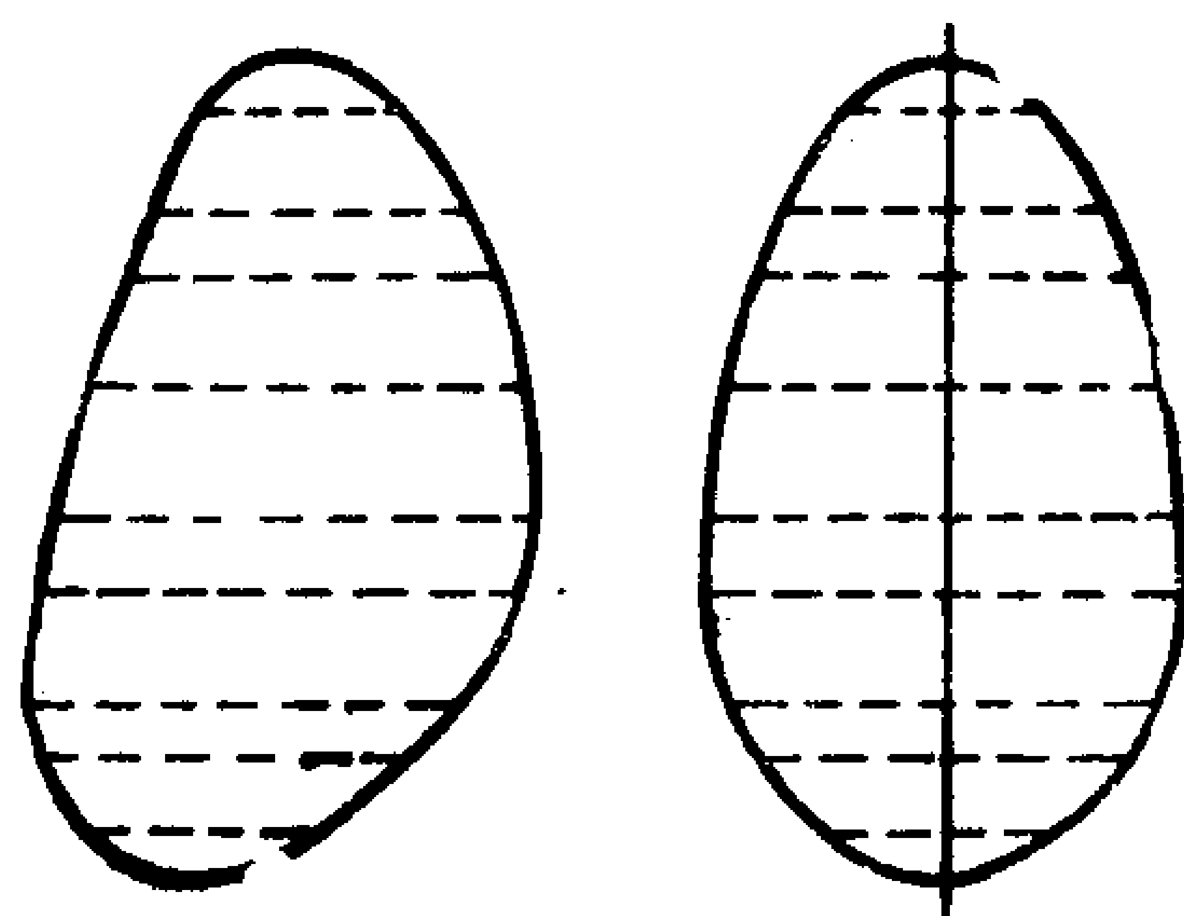


图 3.4

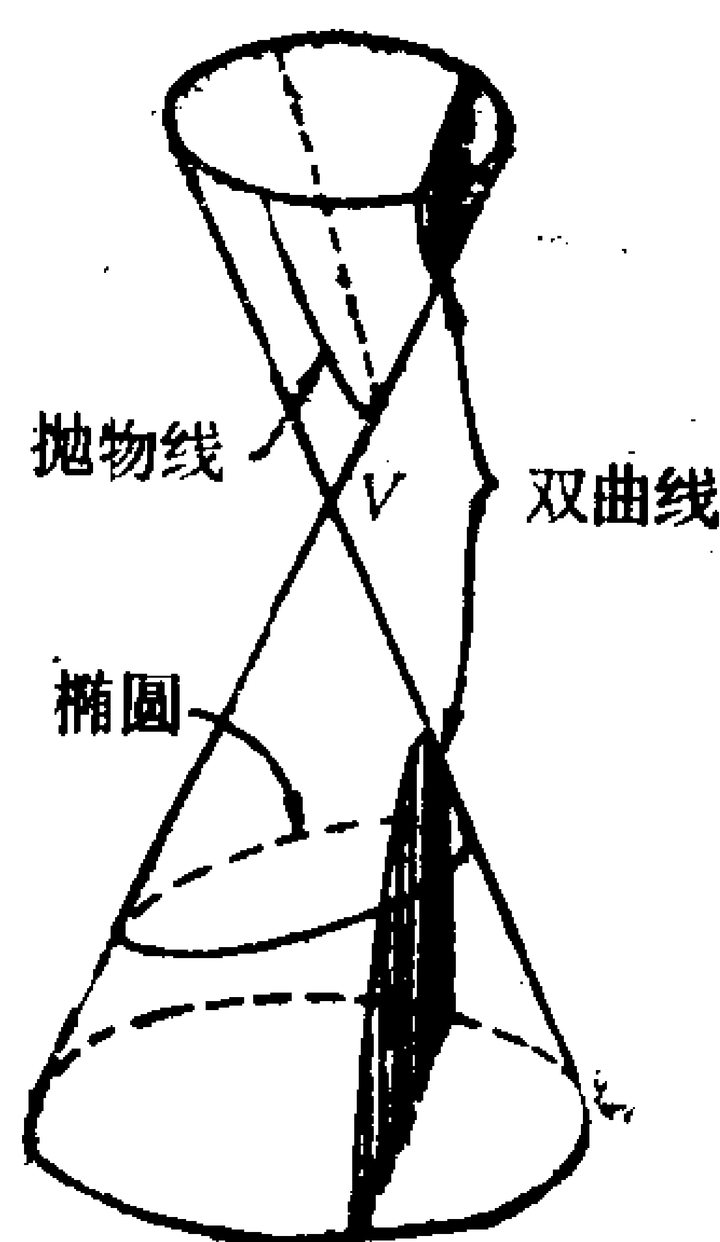


图 3.5

3.4 圆锥曲线

在本节中，我们将暂时离开不等式的课题，去考虑一些重要的几何对象：椭圆，抛物线和双曲线．这些平面曲线通

称为**圆锥曲线**，之所以这样称呼它们，是由于它们都是直圆锥和平面相交的曲线。直圆锥定义如下：设C是一个圆，又设V是通过圆心O的圆的平面的垂线上的一点（见图3.5）。如果V不是O，那么由通过V和C的点的所有直线构成的曲面就称为**直圆锥**。通过V和O的直线称为它的**轴**，而点V称为它的**顶点**。

锥和垂直于它的轴的平面的交线显然是圆。当截面稍稍偏离垂直位置，交线就不再是圆，但它仍然还是闭曲线。平面和直圆锥的任一闭交线称为**椭圆**。因而，圆是一种特殊的椭圆。当然，并非所有的椭圆都是圆。由于直圆锥的一半加上它的内部是凸的，因而椭圆加上它的内部也是凸的。随着平面越来越斜，由它和锥形成的椭圆就变得越来越长。当平面与构成锥表面的一条直线平行时，交线不再是一条闭凸曲线，而是一条无限长的曲线，即**抛物线**。如果平面更加倾斜，交线仍将是无限长但有两个分离的分支。这种圆锥曲线定义为**双曲线**。

椭圆特性的另一种表示法是：椭圆是使得曲线上每一点到两个固定点距离之和相等的平面曲线。因而，如果把一条线的一端钉在一张平整的纸上的点F_1处，而另一端钉在点F_2处，保持这条线绷紧和平直，运动铅笔可在纸上画出一条弧，这条弧将是椭圆的一部分（见图3.6）。容易建立椭圆的这种定义和它作为一条圆锥曲线的定义之间的联系，不过在讨论椭圆的数学教程中很少这样作。我们要证明：定义为圆锥曲线的椭圆有上面所刻划的性质。尔后，我们将转向不等式的课题，

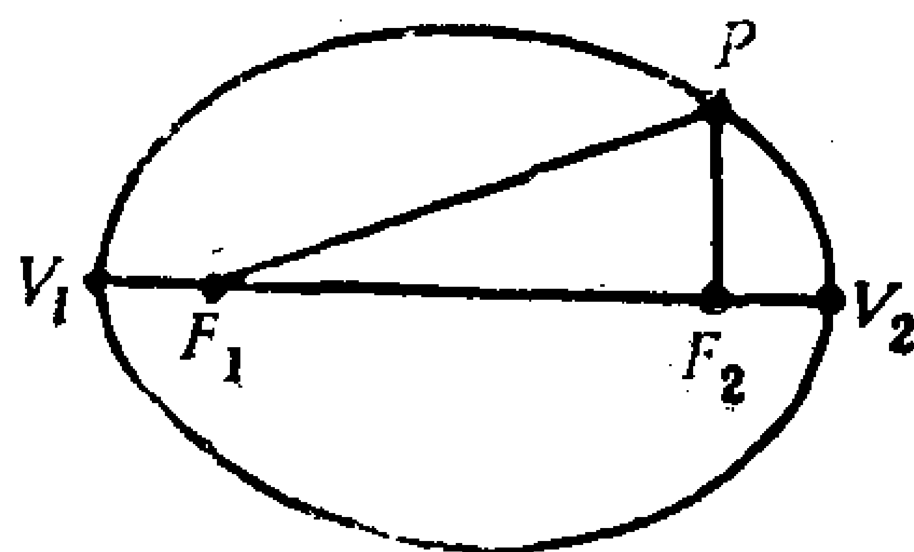


图 3.6

并应用反射原理来建立椭圆的其它重要性质。

证明 （比利时数学家丹德林(Dandelin，1794—1847)已有这种巧妙而优美的想法。）考虑图3.7，它表示一个画在直圆锥上的椭圆。我们在锥内作两个既与锥又与椭圆的平面相切的球。一个球在平面之上，一个在它之下。设平面和球之间的切点是F_1和F_2，又设P是椭圆上任一点。考虑在锥表面上的直线段VP_1PP_2，其中V表示锥的顶点，而P_1和P_2是线段和球之间的切点。由于PP_1和PF_1是从同一点画出的上球的切线段。因而

$$PF_1 = PP_1.$$

类似地，

$$PF_2 = PP_2.$$

因此，
$$PF_1 + PF_2 = P_1P + PP_2 = P_1P_2.$$

但是P_1P_2是和P无关的常数。（为什么？）因此，$PF_2 + PF_1$也是一个常数，我们看出椭圆是平面上到其上两个固定点距离之和相等的点的轨迹。∎

往后我们有机会用到椭圆的下述性质：它是有固定的底边$2c = F_1F_2$和固定的周长$p > 4c$的三角形F_1PF_2的顶点P的轨迹。顶点P'位于椭圆内部的任一三角形$F_1P'F_2$，其周长小于p，而顶点P'位于椭圆外部的任一三角形$F_1P'F_2$，其周长大于p。

类似(在双曲线的平面的同一侧作两个切球)可证：双曲线是平面上到两个固定点距离之差相等的点的轨迹。

问题27. 作图并证明双曲线的这个性质。

上面提到的刻划椭圆和双曲线特征的那两个固定点称为焦点。“焦点”(Focus)是一个拉丁词，意思是炉膛，也就是能够烧焦东西的地点。为了看出为什么椭圆的焦点是能

烧焦东西的地点，我们要用反射原理。设 l 是焦点为F_1和 F_2 的椭圆的一条切线(见图3.8)， P是切点；又设Q是 l 上任一另外的点。由于Q在椭圆之外，

$$QF_1+QF_2>PF_1+PF_2.$$

因此，F_1PF_2是从F_1到 l 再到F_2的最短路径，这样一来，反射原理告诉我们：焦半径PF_1和PF_2与切线l构成相等的

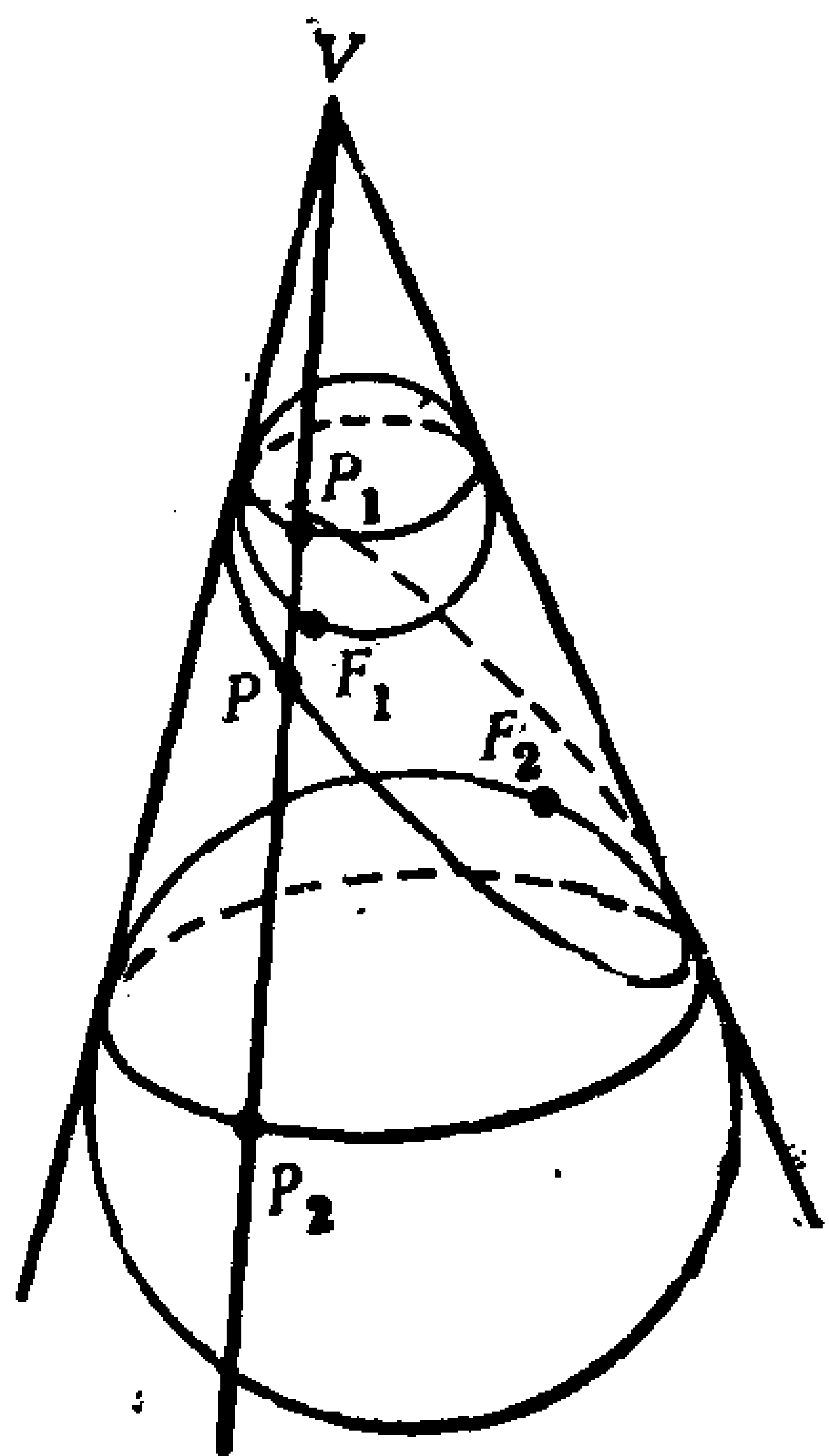


图 3.7

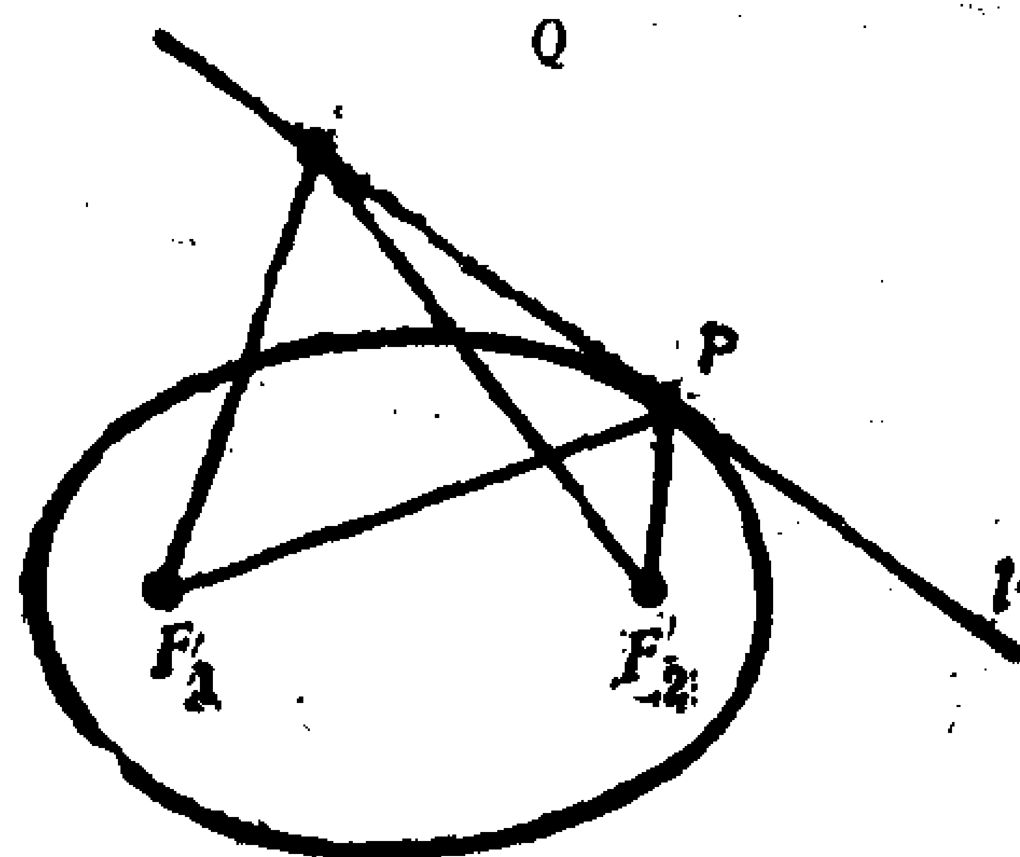


图 3.8

角。这意味着如果椭圆是一个反射镜，那么从点光源F_1出发的光线将全部被椭圆在F_2处聚焦；焦点确实是"能烧焦东西的地点"。

椭圆的顶点是椭圆最长弦的端点，而这条弦通过两个焦点。如果把椭圆最接近顶点V_1的一个焦点(比如

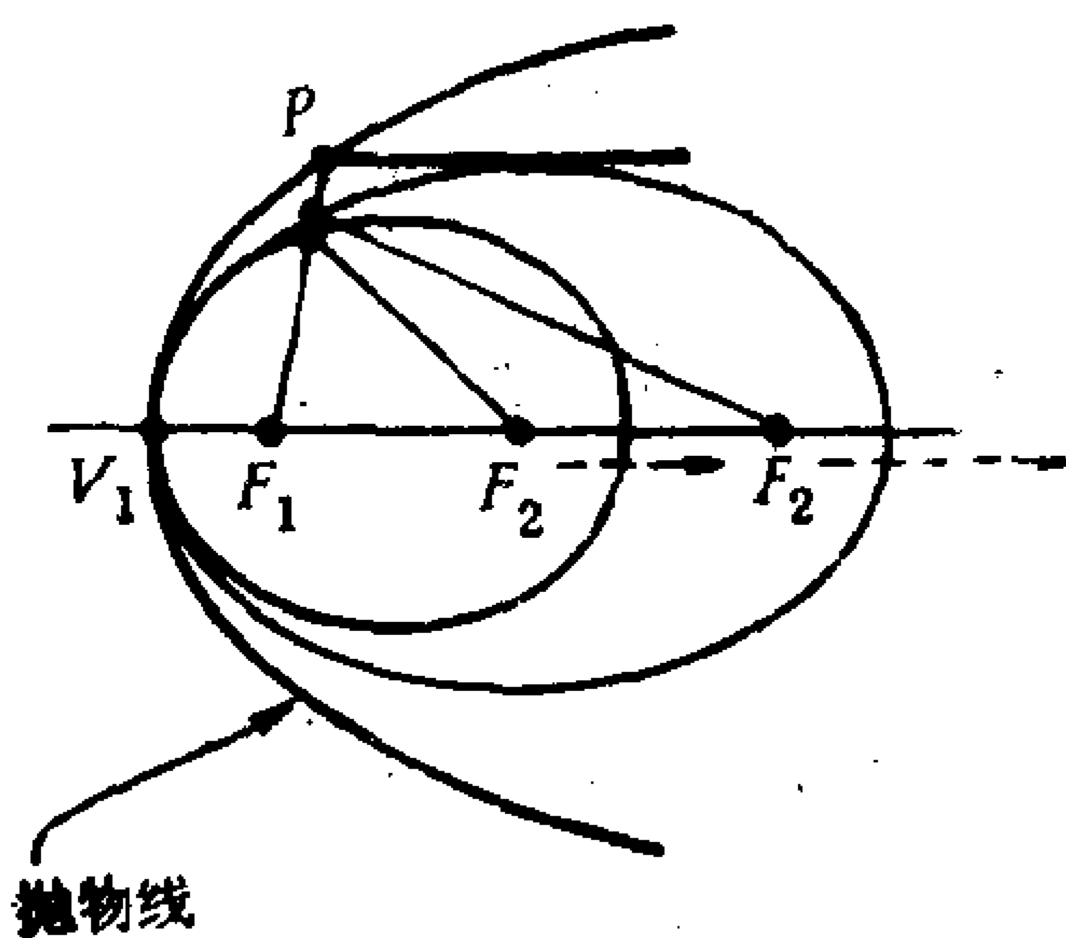


图 3.9

说 F_1)固定，而另一个焦点沿着通过 V_1 和 F_1 的直线移得越来越远，那么这个椭圆就逐渐变长，最终，在极限情况，就变成一条抛物线(见图3.9)。在极限情形，焦半径PF_2与轴，即通过 V_1 和 F_1 的直线平行。抛物线的这个性质：它把从它的焦点发射的所有光线沿同一个方向反射，在汽车前灯以及射电望远镜等种种器具的设计中，当然是很有用的。

问题28. 证明双曲线的切线平分切点处由焦半径形成的角。

提示 设 l 是平分角 F_1TF_2的直线(见图3.10)，对 l 上任一其它的点 P，证明 $PF_1-PF_2<TF_1-TF_2$，由此说明，仅有T是位于双曲线上的 l 的点．利用对 l 的反射。

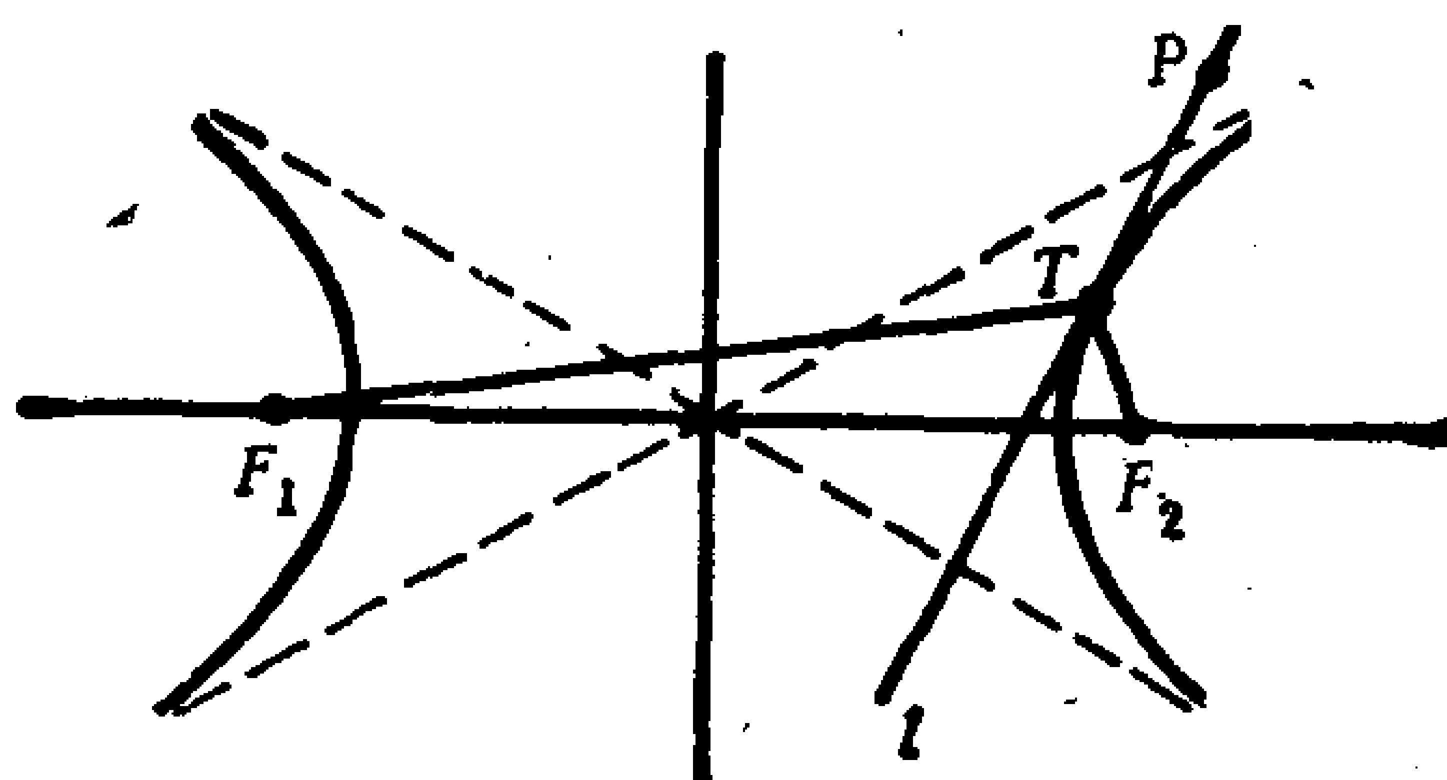


图 3.10

如果椭圆与双曲线有相同的焦点，就称它们是共焦的。

问题29. 证明：如果椭圆和双曲线是共焦的，则在任一交点上，它们的切线垂直。

3.5 三角形

以反射的几何概念为基础的论证方法常能收到意想不到的功效。很多问题曾长期是很难啃动的“硬骨头”；而一旦

人们有了“试试反射法”的想法时，它们就屈服了，并且变得惊人地简单。在三角形的性质方面尤其如此。三角形已经被研究许多年了，但是三角形的新的性质却仍不时被发现。其中的某些还仅仅是猜测，也就是说，尽管有重要的证据支持它们，但还没有人能够证明它们确实成立。在这一节中，我们要考察几个新近才被发现的三角形的性质。

我们从法格内诺(Fagnano)问题开始（见图 3.11）：能够内接于一给定的锐角三角形的周长最小的三角形是什么？你能猜出解吗？反射原理能告诉你什么呢？用一些时间来考察几个特殊情况，看看你是否能够提出一个猜测来。

下面给出的法格内诺问题的解属于著名的匈牙利数学家L·费叶(Fejér，1880—1958)。1900年，当他还是柏林的一个学生时，他发现了它。为了解决这个问题，我们注意，根据反射原理，由最小内接三角形的每一对边与给定三角形对应的切边构成的两个角必相等。换句话说，最小内接三角形(或它们)的顶点是给定三角形的边上仅有的那种点：一个台球经过两次反射正好返回到它本身。费叶证法的美妙之处在于，它用一种简单的方式告诉我们，怎样去找出最小三角形顶点的位置。

假设给定的三角形是ABC。试图找出周长最小的内接三角形UVM的一种方法是，(a) 在BC和AC上分别任取一点U_1和V_1，并在AB边上选择W_1，使得和$U_1W_1+V_1W_1$尽可能地小(见图3.12)；(b) 保持V_1与W_1不动，在BC上确定U_2，使得和$W_1U_2+V_1U_2$最小；(c) 保持W_1与U_2不动，在AC上确定V_2，使得和$U_2V_2+W_1V_2$最小；(d) 固定U_2与V_2，找出W_2，使得$U_2W_2+V_2W_2$最小；等等。除特殊情形外，这个过程在有限步是不会停止的。此外，人们必须证明这个无限

的过程导致极限三角形UVW。

费叶避开了这个困难。他的想法是固定U，而以一个妙招来寻求V和W的最佳可能位置——这个位置使$\triangle UVW$的周长最小。为此，他把边AB和AC看成镜面，用它们来反射

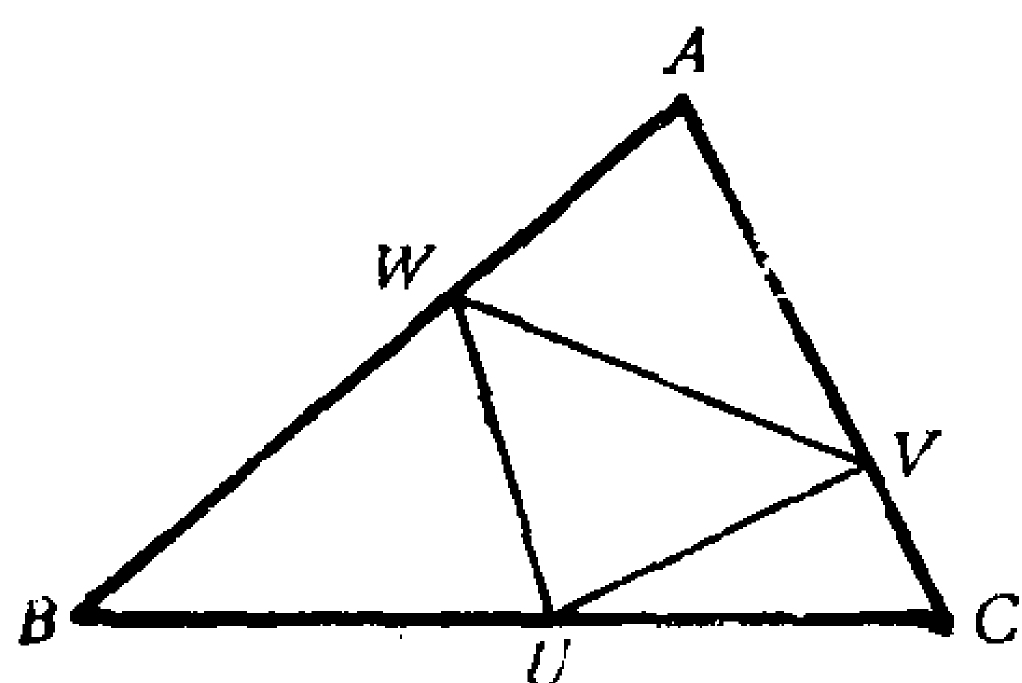


图 3.11

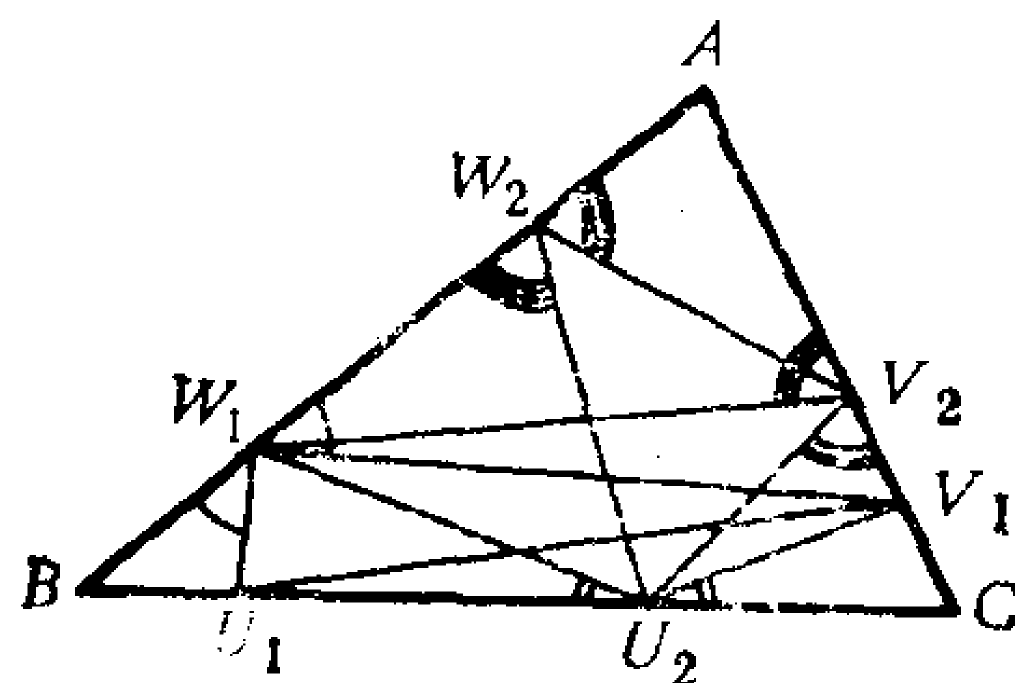


图 3.12

U（见图3.13）。我们把镜象叫做U'和U''。于是

$$U'W+WV+VU''=UW+WV+VU.$$

但是当V和W位于由U'和U''确定的直线上时，第一个和最小。因而，给定U后，我们已经确定了使$\triangle UVW$的周长极小化的V和W的位置。

现在，我们只需要确定U的最佳位置(见图3.14)。由于AB和AC分别是UU'和UU''的垂直平分线，因而$\triangle U'AU''$是$AU'=AU=AU''$的等腰三角形。$\triangle U'AU''$的底边$U'U''$的长度就是$\triangle UVW$的周长。因为$\angle U'AU''=2\angle ABC$，所以$\angle U'AU''$是固定的。因此，当$\triangle U'AU''$的等腰最短时，它的底边最短。当$AU$最短时，这个腰最短，注意当$AU$垂直于$BC$时，也就是，当$AU$是高时，$AU$达到最小的可能值。$\triangle ABC$是锐角三角形的事实，保证了$A$处的高的垂足落在$BC$边上。因而，我们现在已经唯一地确定了周长最小的内接三角形。

此外，很清楚的是，如果 $\triangle UVW$ 是最小三角形，无论 U 相对 A 有什么性质，V 相对 B 就有同样的性质，而 W 相对 C 也有同样的性质。由于在一开头我们可以固定 V 或 W 来代

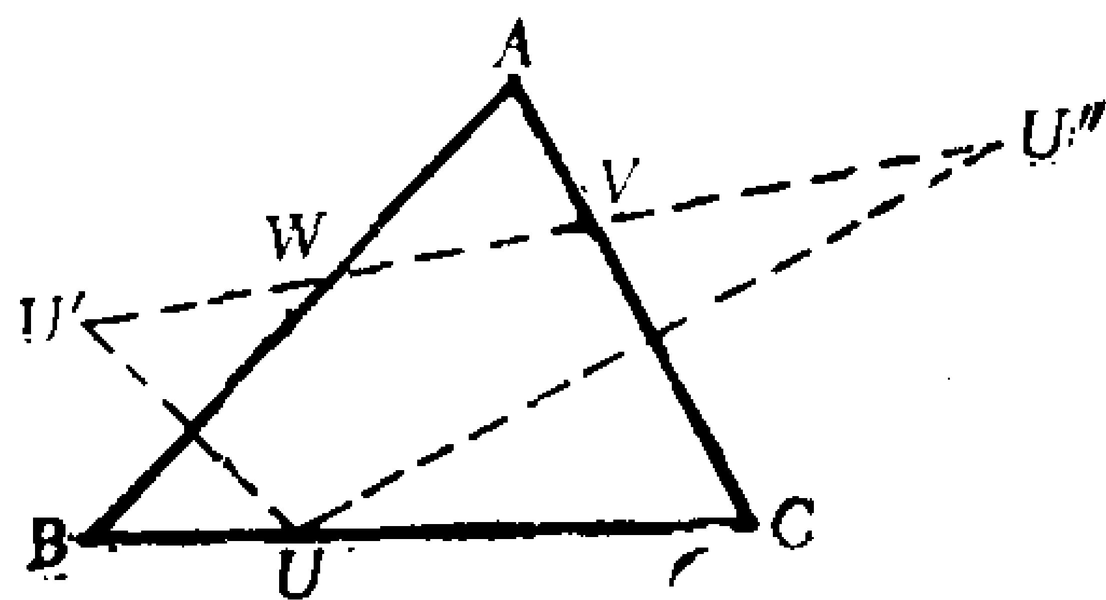


图 3.13

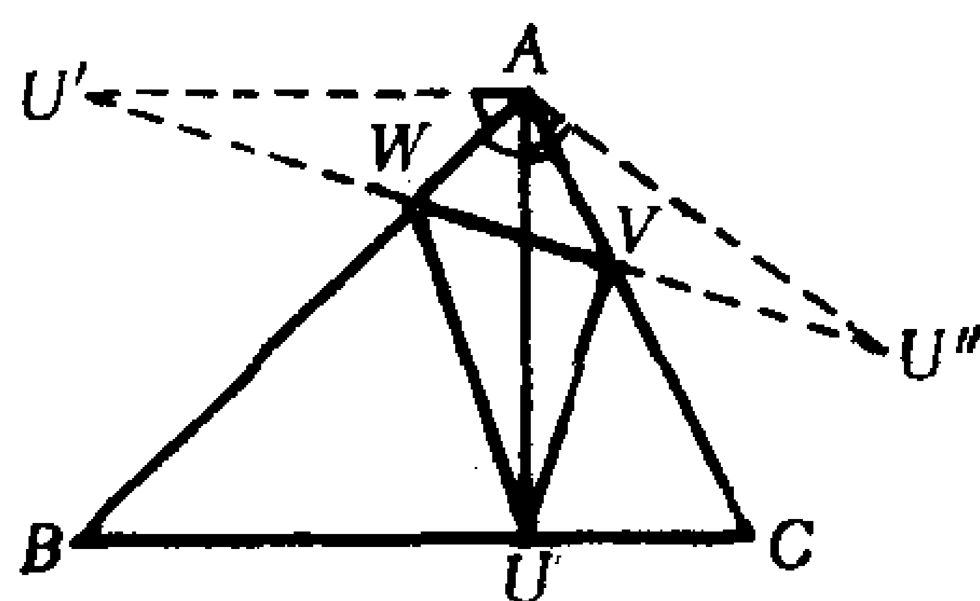


图 3.14

替 U，所以这是真的。从而，我们已经证明了

定理17 给定一个锐角三角形，周长最小的内接三角形的顶点就是给定三角形的高的垂足。

这个最小三角形称为垂足三角形。定理17间接地处理了在三角形台球桌上击一球，使它经过两次反射后返回原位置的问题。这个定理表明，对于球的特定位置，我们能够做到这一点。在你研究从任一位置出发是否能做到这一点之前，试解决：

问题30. 我们沿着什么方向击位于矩形台球桌上的台球时，可使它经有限次反射后返回原位置？沿什么方向击球时，可使它击中桌上的另一个球？对于任何其它形状的台球桌，你能够解决这些问题吗？假设球是一个点。

提示 用桌子的边作为镜面来反射桌子和球；然后再反射由反射所得的象；等等。

问题31. 如果内接于一个凸 n 边形的周长最小的 n 边形存在，那么它必须有什么性质？

在几年前刚刚第一次作出的和我们刚才已经解决的问题

有关的一个猜测是：

猜测：内接于给定三角形的任一三角形必把前者分成四个较小的三角形。内接三角形的周长决不能小于其它三个三角形每一个的周长。

至今还沒有人证明这个猜测。在上述的猜测中用“面积”代替“周长”所得的问题，已经用一种不是这本书中所讨论的思想为基础的方法解决了。

1935年保尔·厄尔多斯(Paul Erdös)猜出有关三角形的一个新奇的定理。

定理18(厄尔多斯-莫德耳) 如果P是三角形ABC(内部或边界上)的任一点，又如果p_a,p_b和p_c是P到$\triangle ABC$的三边的距离(见图3.24(a))，则

$$PA+PB+PC\geqslant 2(p_a+p_b+p_c).$$

进而，当且仅当$\triangle ABC$是等边三角形，而且P是它的外接圆中心时，上式中等号成立。

两年之后，1937年L·J·莫德耳和D·R·巴罗(Barrow)证明了厄尔多斯的猜测，但是他们的证明都不是初等的。后来，1945年D·K·卡扎里诺夫发现了一个以反射思想为基础的初等证明。在介绍他的证明之前，我们要介绍厄尔多斯猜测的某些动机，我们还要证明一些辅助定理。

厄尔多斯是怎样作出他的猜测的？他提出这个想法的依据是什么？一种可能性是因为他推广了三角形的外接圆半径R和内切圆半径r之间的欧拉(Euler)不等式

$$R\geqslant 2r,$$

仅对等边三角形，其中的等号成立。这个不等式是欧拉证明的下述定理的一个推论。

定理(欧拉) 三角形的内切圆和外接圆中心之间的距离

的平方是R^2-2Rr。

由于 $$R^2-2Rr\geqslant 0 \quad 且 \quad R>0,$$
因此 $$R-2r\geqslant 0.$$
和$PA+PB+PC$与$3R$类似，而和$p_a+p_b+p_c$与$3r$类似；所以，作出厄尔多斯的猜测是合理的。当然，或许他有更多的证据。

由于欧拉不等式$R\geqslant 2r$本身就是一个有趣的结果，所以我们要打断关于厄尔多斯-莫德耳不等式的讨论，先来给出不等式$R\geqslant 2r$的两个证明。第一个证明建立了欧拉定理$d^2=R^2-2Rr$，其中d是三角形的内切圆中心和外接圆中心之间的距离。第二个证明仅仅建立了不等式$R\geqslant 2r$，而且至少是不明显地利用了反射的思想。

在第一个证明的过程中，我们要用以下两个引理。

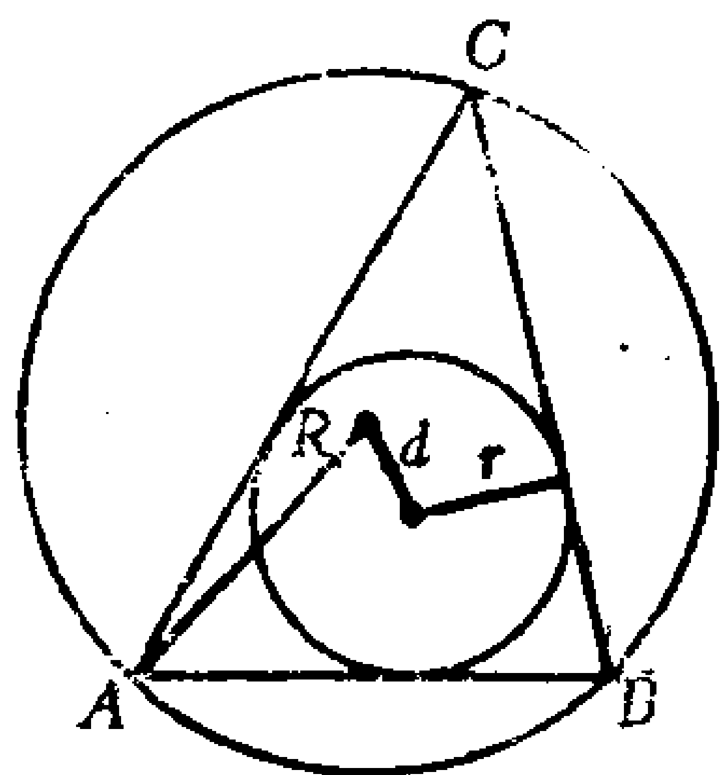


图 3.15

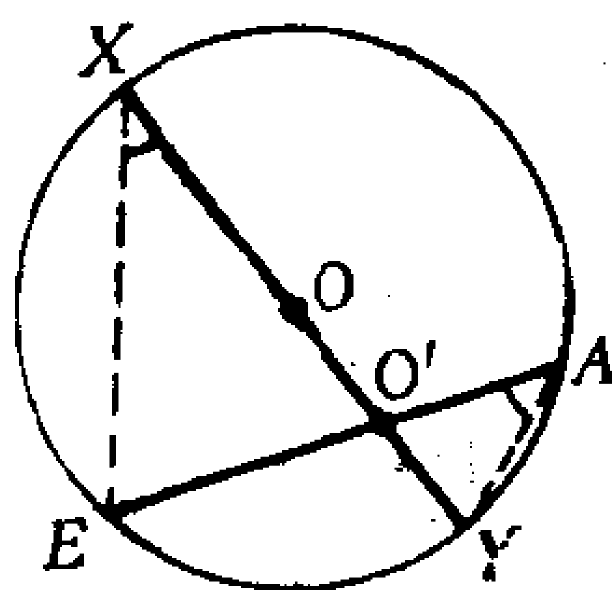


图 3.16

引理1 设XY是中心为O的圆的一条直径(见图3.16)。设XY与圆的弦AE相交，又设O'是交点。则
$$AO'\cdot O'E=XO'\cdot O'Y.$$

证明 因为
$$\angle AO'Y=\angle XO'E \quad 和 \quad \angle XEO'=\angle AYO',$$
所以三角形$O'AY$与$O'XE$相似。

因而 $$\frac{AO'}{XO'}=\frac{O'Y}{O'E}.\quad\blacksquare$$

如果XY不是直径而是与AE相交的任一弦，上面的证明和结论仍然有效。

引理2 设ABC（见图3.17）是内切圆中心为O'的三角形，又设E是ABC的外接圆的（不包含A的）弧BC的中点。则

$$EB=EO'=EC.$$

证明 设P是$\triangle ABC$的对着A的外心；即设P是角A和外角UBC，VCB的平分线的交点（见图3.17）。（容易证明这三条线交于一点。）角平分线BO'与BP是垂直的，这是由于被它们平分的角构成一个平角；类似地，角平分线CO'与CP也垂直。所以，O'和P是通过B和C的圆的一条直径的端点。这个圆的中心是它的直径$O'P$与它的一条弦BC的垂直平分线的交点。但是$AO'P$是$\angle BAC$的平分线。所以，$AO'P$在$\triangle ABC$的外接圆的（不包含A的）弧BC的中点处切开这段弧，这个中点也是BC的垂直平分线上的一个点，从

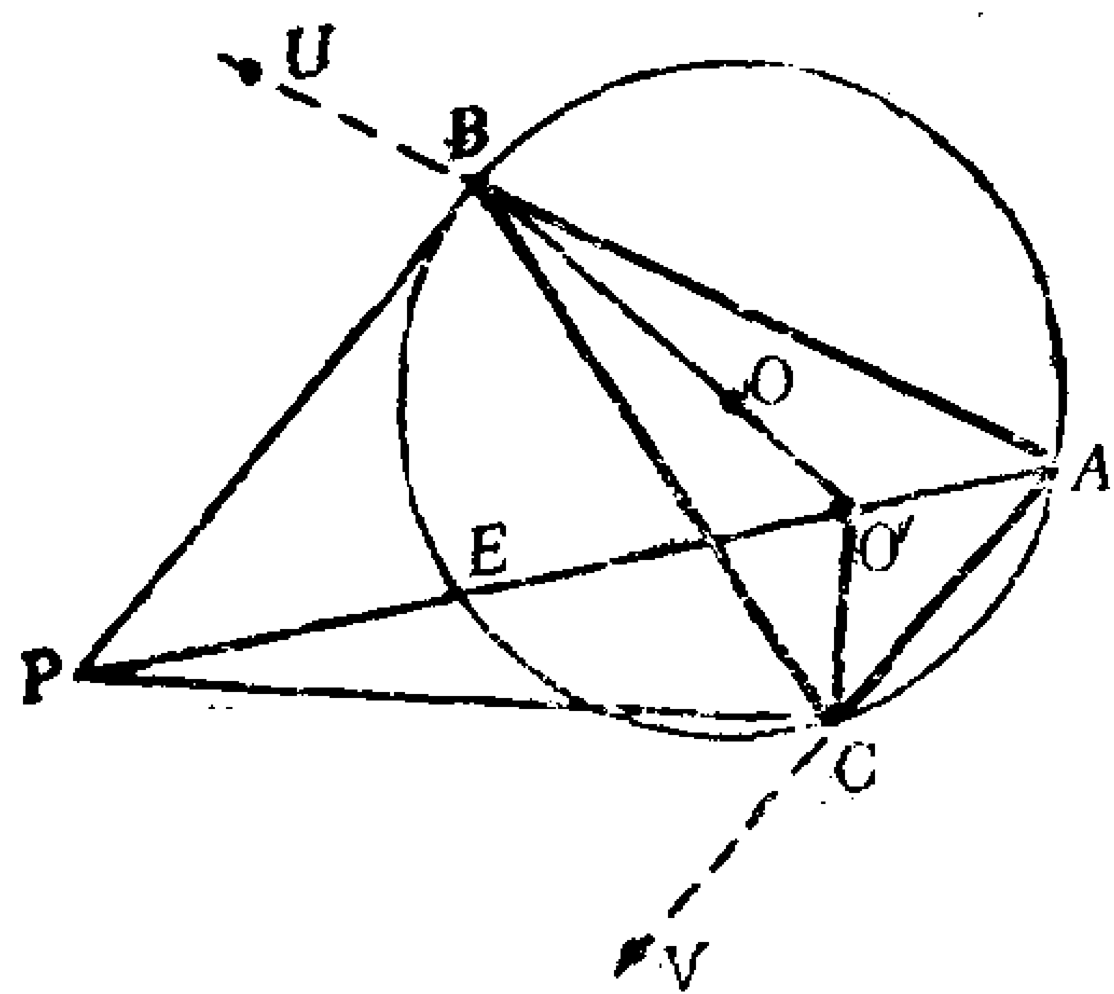


图 3.17

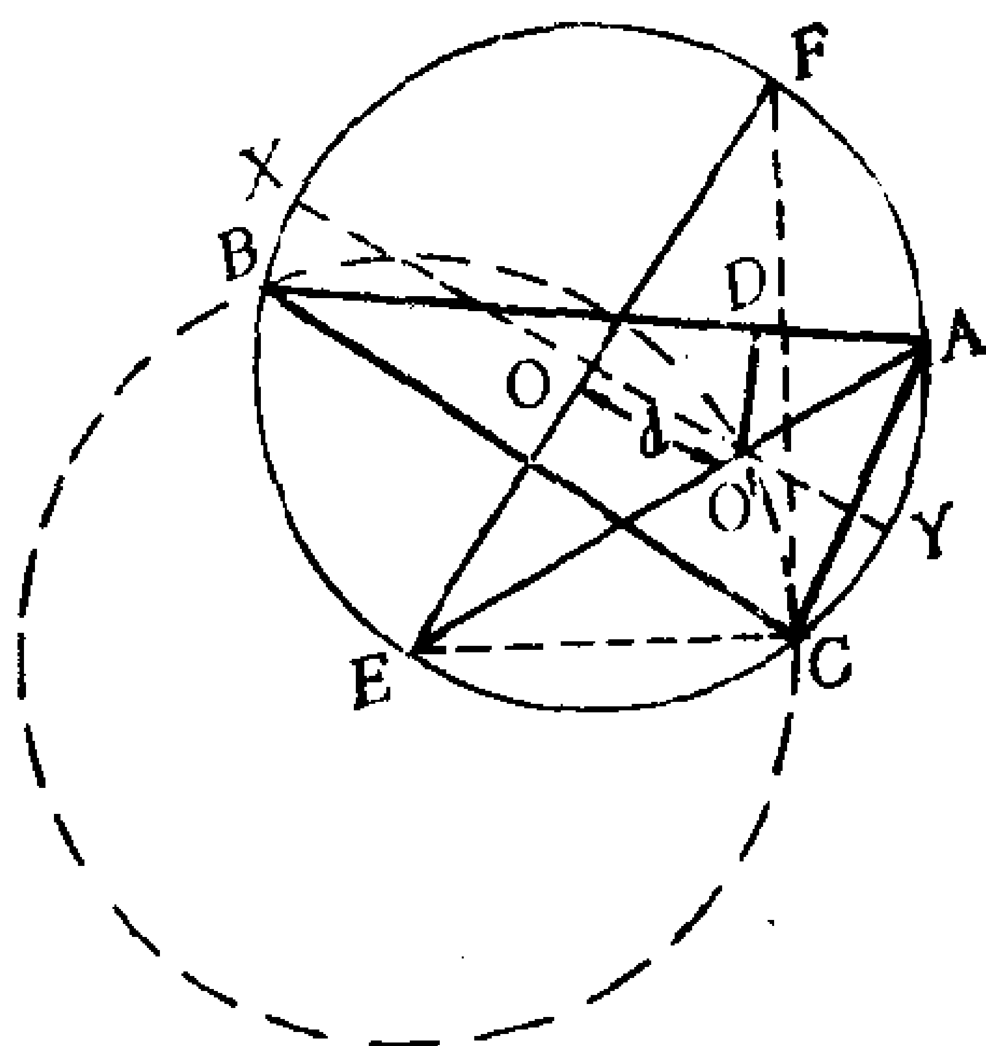


图 3.18

而，中点E是通过P,C,O'和B的圆的中心，而且$EB=EO'=EC$。▎

欧拉定理的证明①　设ABC是给定的三角形，设O和O'分别是它的外接圆的中心和内心，设D位于AB之上，且$O'D$垂直于AB，设E是弧BC(不包含A的那段)的平分点，又设EOF和$XOO'Y$是外接圆的直径。用d表示OO'，我们有

$$XO'=R+d \quad 和 \quad O'Y=R-d.$$

根据引理1，

$$AO'\cdot O'E=(R-d)(R+d).$$

根据引理2，

$$O'E=EC.$$

于是
$$(R-d)(R+d)=AO'\cdot EC.$$

三角形$AO'D$和FEC是直角三角形。但是，由于角DAO'(即BAE)和CFE从外接圆上切下等弧($\widehat{BE}$和$\widehat{EC}$)，于是它们相等。所以，三角形$AO'D$与FEC相似。从而，

$$\frac{AO'}{EF}=\frac{O'D}{EC} \quad 或 \quad O'D\cdot EF=AO'\cdot EC.$$

由于$O'D=r$和$EF=2R$，这个等式可写成

$$r\cdot 2R=(R-d)(R+d)=R^2-d^2.$$

因此，
$$d^2=R^2-2Rr. \quad ▎$$

我们已经说过，由于$R>0$，最后的等式蕴涵着不等式$R\geqslant 2r$。

在不等式$R\geqslant 2r$的第二个证明过程中，我们也需要两个引理。

① 另一个证明包含在《匈牙利问题集》(Hungarian Problem Book，本丛书即将出版的一册)中；见问题1897/2的注释2。那个证明属于L·费叶，他那时是个中学生。

引理3 考虑有固定底边BC,而顶点V落在与BC平行的直线l上的三角形(见图3.19)。设MQ是BC的垂直平分线。则,随着V沿l移近Q,三角形VBC的内切圆半径要增大。

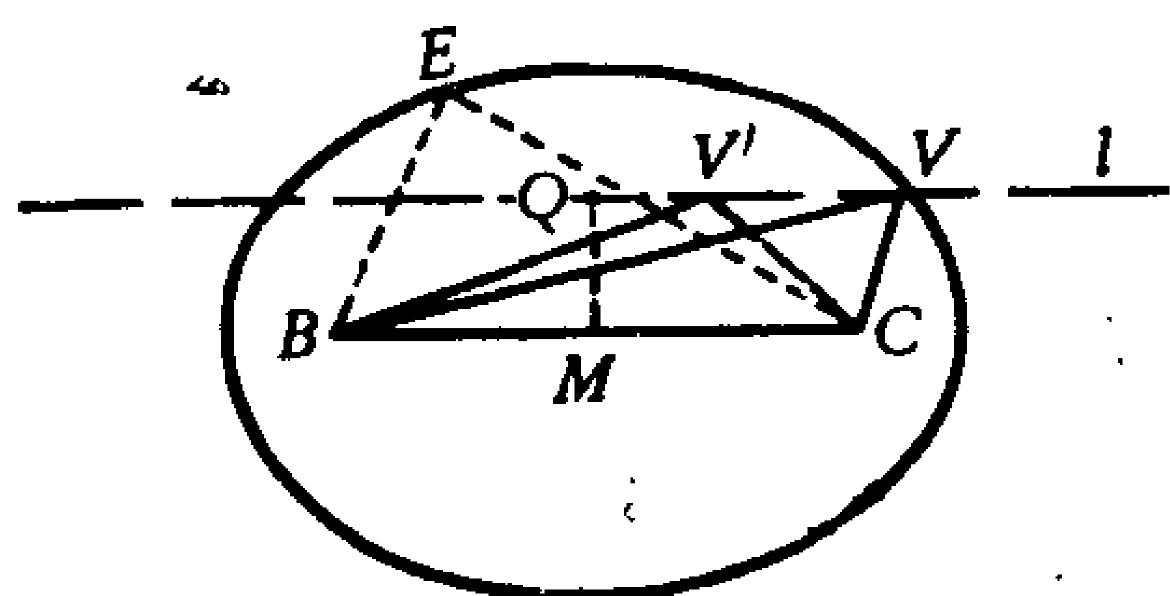


图 3.19

证明 作以B和C为焦点的椭圆,使得椭圆上的每一点E满足条件

$$BE+EC=BV+VC.$$

那么,对l上满足$V'Q<VQ$的任一点V',

$$BV'+V'C<BV+VC.$$

由于V'位于椭圆的内部,三角形BVC的周长P就大于三角形$BV'C$的周长P'。

设r是三角形BVC的内切圆半径,而r'是三角形$BV'C$的内切圆半径。由于这些三角形的面积是相同的,所以我们有(见问题12的解答)

$$T(BVC)=\frac{Pr}{2}=T(BV'C)=\frac{P'r'}{2}.$$

由于$P>P'$,由此推出$r<r'$。▎

引理4 考虑有固定底边BC,顶点U位于与BC在C点构成定角的直线l上的三角形(见图3.20)。则随着U沿l离C向远处移动,三角形UBC的内切圆半径要增大。

证明 设$UC<U'C$。为比较三角形UBC和$U'BC$的内切圆半径r和r',我们想起三角形的内切圆中心是它的三条角平分线的交点。很清楚,当U沿l离开C移动到U'时,B角增大而角平分线的交点O离开C沿$\angle C$的角平分线移动到

O'。所以 $r<r'$。❙

不等式 $R\geqslant 2r$ 的第二个证明 如果给定的三角形是等边的，则 $R=2r$，等号成立。

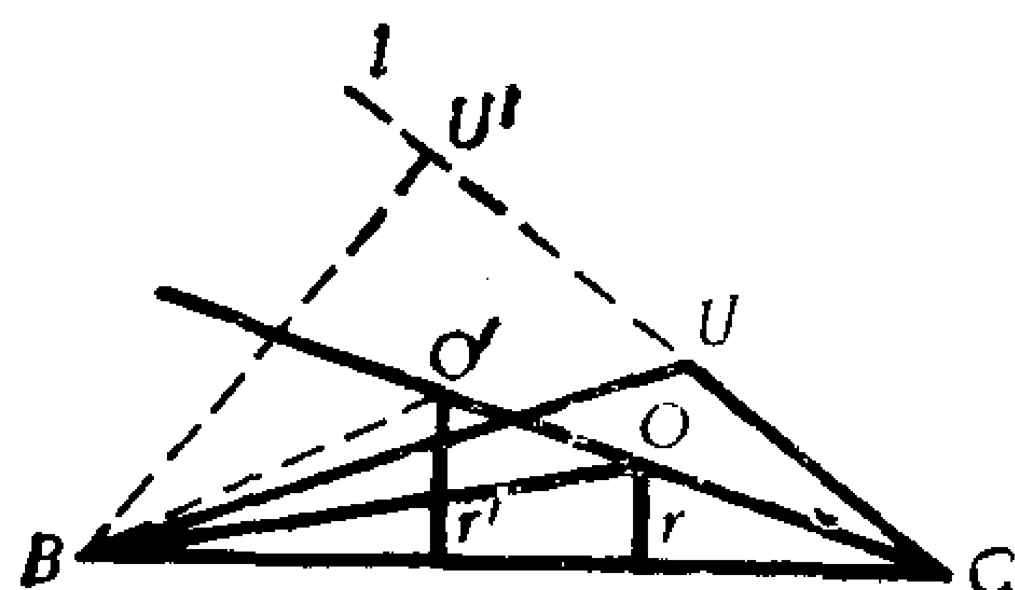


图 3.20

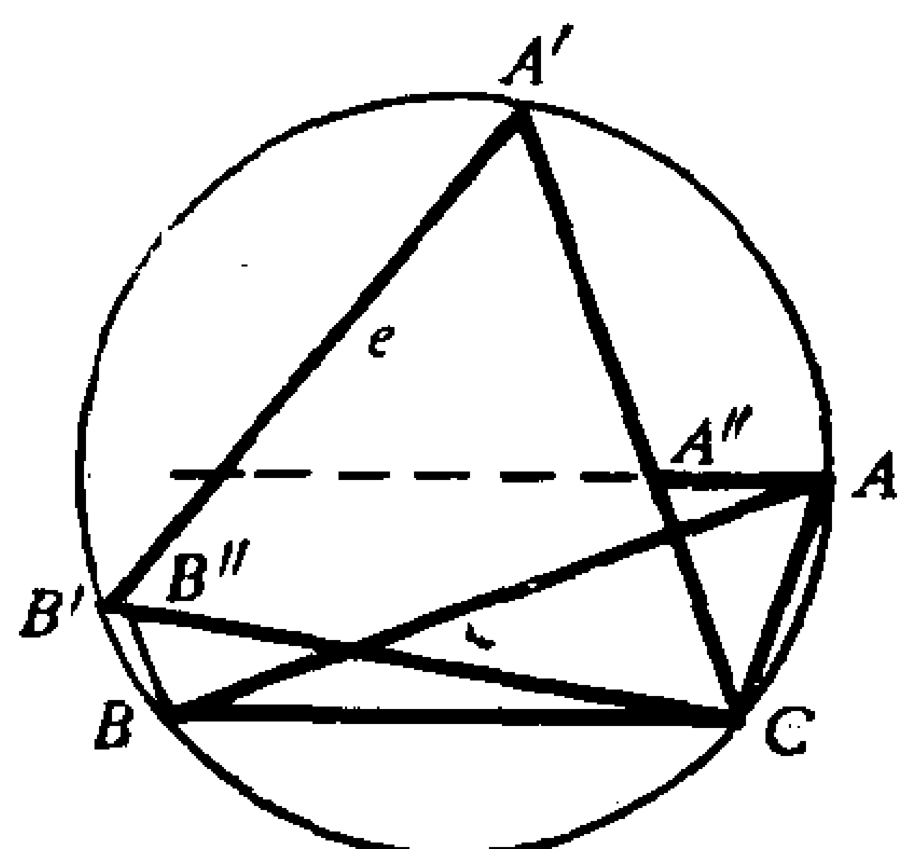


图 3.21

假设给定的三角形不是等边的。记顶点为 A，B，C，并使得 AC 是它的最短边，A 角比 C 角小(见图3.21)。设 R 是三角形 ABC 的外接圆 K 的半径，又设 e 是 K 中的内接等边三角形的边长。于是 $AC<e$。沿圆周 K，我们移动 A 离开 C 直到一点 A' 处，使得 $A'C=e$。设 B' 是等边三角形 $A'B'C$ 的第三个顶点。用 $r(XYZ)$ 表示三角形 XYZ 的内切圆半径，我们现在要来证明

$$r(ABC)<r(A'BC)<r(A'B'C)=\frac{R}{2}.$$

为证第一个不等式，我们沿 BC 的平行线移动 A 直到 $A'C$ 上的 A'' 处。按引理 3，$r(ABC)<r(A''BC)$。接着，我们沿 $A'C$ 从 A'' 移动到 A'。按引理 4，$r(A''BC)<r(A'BC)$。这样就建立了第一个不等式。为证明第二个不等式，我们沿 $A'C$ 的平行线把 B 移动到 B''，然后沿 $B'C$ 从 B'' 移动到 B'。因此，如果 $\triangle ABC$ 不是等边三角形，则 $r(ABC)<R/2$ 或 $R>2r(ABC)$。❙

问题32. 利用反射原理和下述结果：在面积相同的所有 n 边形中，正 n 边形有最小的周长(它是问题21后面那个定理的对偶提法)，证明：如果 P 点位于面积为 T 的三角形 ABC 的内部，则

$$PA+PB+PC\geqslant 2\sqrt{\sqrt{3}\,T}.$$

问题33. 证明上面的不等式蕴涵着

$$PA+PB+PC\geqslant 6r=2(r+r+r).$$

这个结果进一步证实了定理18。画一个三角形，并选取一个内点 P，测量它到顶点和边的距离。所得的结果是否符合这个定理?

为了证明厄尔多斯-莫德耳定理，D·K·卡扎里诺夫利用了勾股定理的一个很少为人所知但非常漂亮的推广，即一个属于帕普斯的定理。

定理19（帕普斯） 设 ABC 是任一三角形。设 $AA'C'C$ 和 $BB''C''C$ 是在 AC 和 BC 上作的任意两个平行四边形，使得或者两个平行四边形都在三角形之外，或者二者都不完全在三角形之外(见图3.22)。延长它们的边 $A'C'$ 和 $B''C''$ 交于 P。在 AB 上作第三个平行四边形 $ABP''P'$，使 AP' 平行于 CP，且 $AP'=CP$。则 $\square ABP''P'$ 的面积等于平行四边形 $AA'C'C$ 与 $BB''C''C$ 的面积之和。

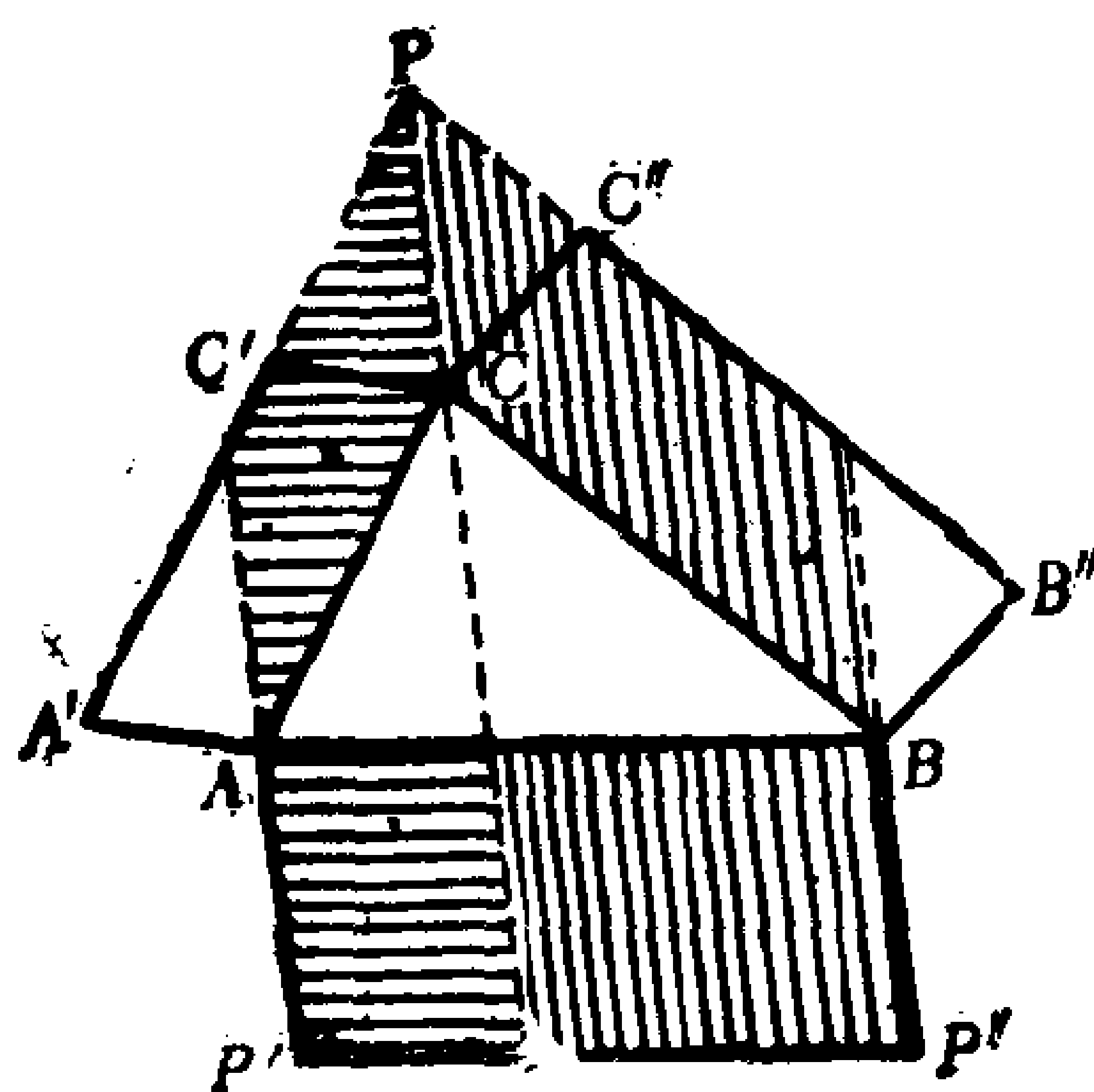


图 3.22

对平行四边形在三角形之外的情形，图3.22中包含着定

理的证明；另一种情形的证明也同样简单。注意，当给定的三角形是直角三角形，并在它的勾和股上给定的平行四边形是正方形时，则帕普斯定理就特殊化了，而成为勾股定理。

问题34. 假设三角形 ABC 的边 AC 和 BC 上的平行四边形有一条公共边。试在这种情形下，把帕普斯定理推广到三维情形。

注意，问题34中所考虑的情形实际上并不是一种特殊情形；一般情形总能化成它(见图3.22，其中 PC 是阴影部分的平行四边形的公共边)。下面在定理18的证明中，我们将要应用这种貌似特殊情形下的帕普斯定理。

在定理18的证明中，我们还要用到一个平面几何的定理。它告诉我们在什么条件下，不等式

$$PA+PB+PC\geqslant 2(p_a+p_b+p_c)$$

中的等号成立。

引理 给定以 O 为外接圆中心的一个三角形 ABC，则 A 角的平分线也平分 AO 与 A 到 BC 边上的高之间的夹角。

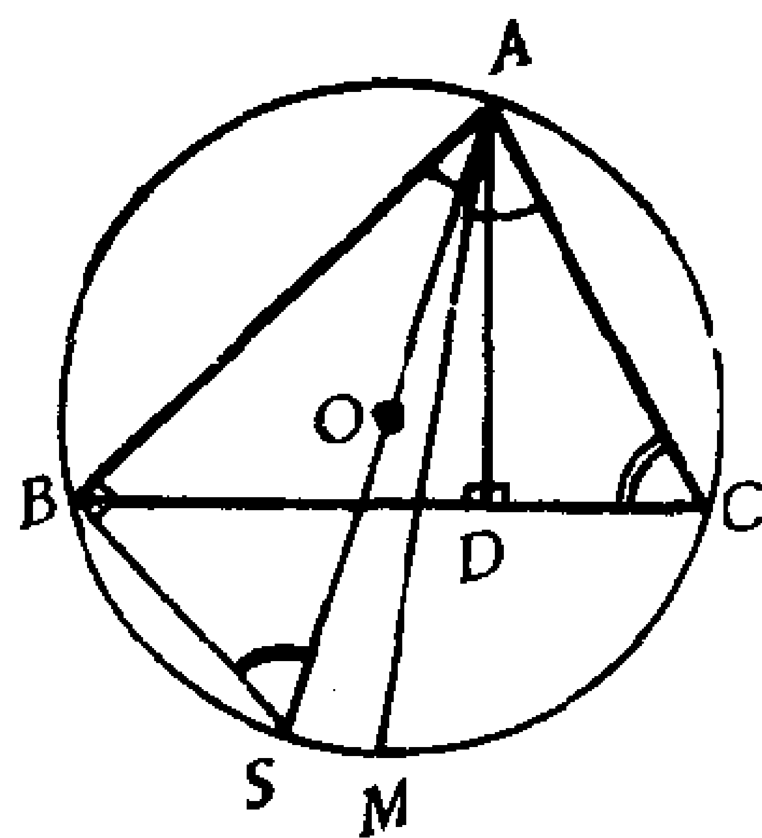


图 3.23

证明 设 AD 是高，AM 是 $\angle A$ 的平分线，又 AOS 是外接圆的直径(见图3.23)。于是 $\angle ABS$ 和 $\angle ADC$ 是直角；此外，$\angle ASB=\angle ACD$，这是因为它们都用 $\overset{\frown}{AB}/2$ 来度量。所以，三角形 CAD 与 SAB 相似，$\angle BAS=\angle DAC$。由于 AM 是 $\angle A$ 的平分线，于是

$$\angle SAM=\angle DAM. \quad \blacksquare$$

我们现在能够证明厄尔多斯-莫德耳不等式——定理18

了。证明的关键是第一步，即反射原理的应用。设三角形ABC已给，又设P是其内部或边界上的任一点。(见图3.24(a)) 我们用一个新$\triangle AB'C'$来代替$\triangle ABC$，其中B'和C分别是B和C相对A的平分线AD的反射(见图3.24(b))。我们没有去改动P点；记住这一点很要紧。把帕普斯定理用于$\triangle AB'C'$，考虑由A，P和C'以及A，P和B'确定的两个平行四边形(见图3.24(c)和(d))，它们的面积之和是

$$cp_b+bp_c。$$

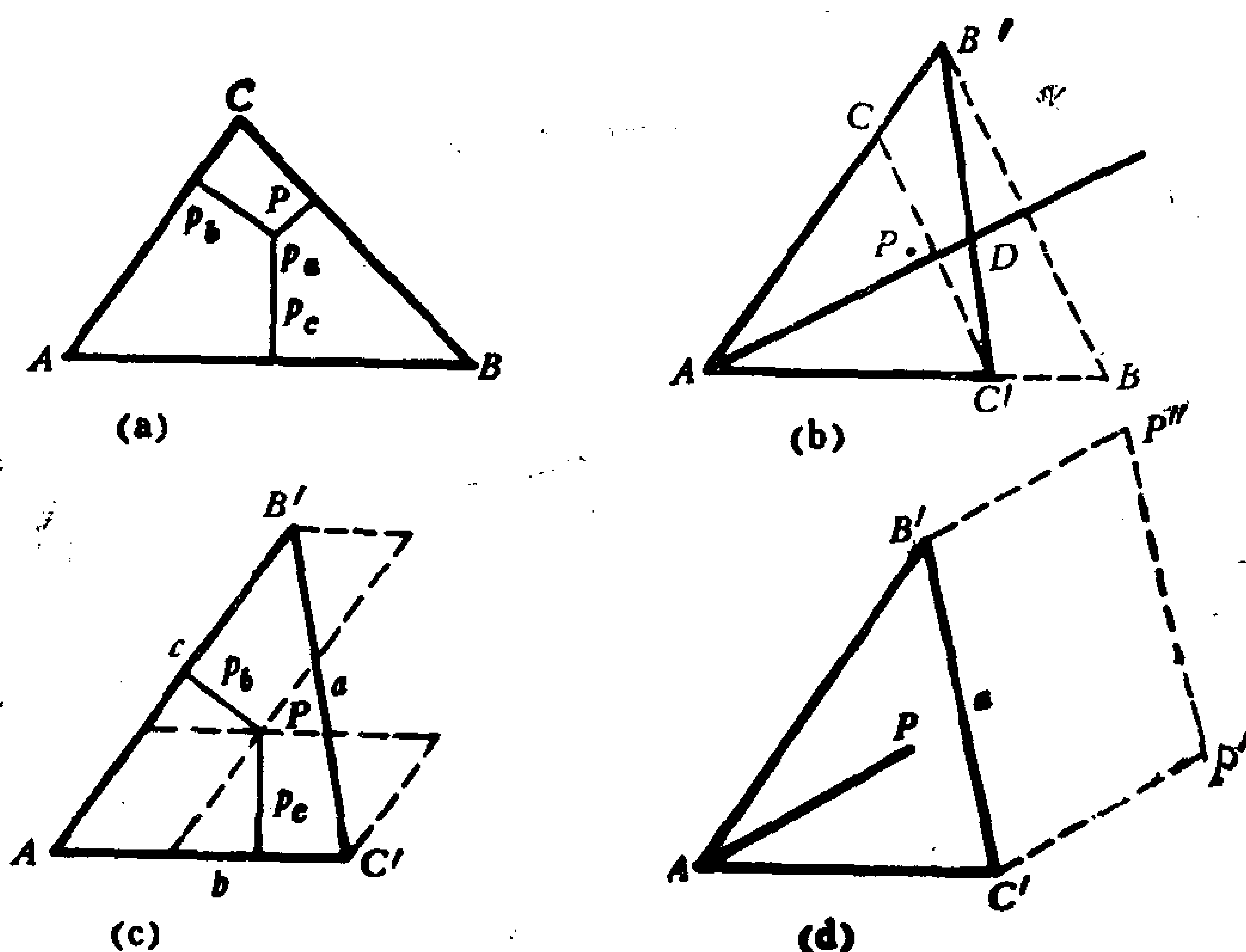


图 3.24

第三个平行四边形(它的底边$B'C'$长度为a，而邻边平行且等于PA)的面积小于或等于$a\cdot PA$，当且仅当AP垂直于$B'C'$时，等号成立。按86页上叙述的引理，仅当P位于AO上时，这才可能出现，其中O是$\triangle ABC$的外接圆的中

心。这样一来，按帕普斯定理

$$cp_b+bp_c\leqslant aPA \quad 或 \quad \frac{c}{a}p_b+\frac{b}{a}p_c\leqslant PA.$$

类似地，有

$$\frac{a}{b}p_c+\frac{c}{b}p_a\leqslant PB \quad 和 \quad \frac{b}{c}p_a+\frac{a}{c}p_b\leqslant PC.$$

把后面三个不等式的右端和左端分别相加，我们求出

$$PA+PB+PC$$
$$\geqslant\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)p_a+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)p_b+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)p_c.$$

右端每个系数至少是2．为什么？（如果你不清楚的话，见第1.2节。）所以

$$PA+PB+PC\geqslant 2(p_a+p_b+p_c).$$

当且仅当 $a=b=c$，并且 P 位于 AO,BO 和 CO 之上时，等号成立；也就是说，当且仅当 $\triangle ABC$ 等边，且 P 是它的中心时，等号成立。▎

厄尔多斯-莫德耳不等式的第二个初等证明已由L·班柯夫（L.Bankoff）发现[1]。

问题35. 如果点 P 位于三角形 ABC 之中，则

$$PA\cdot PB\cdot PC\geqslant 8p_a\cdot p_b\cdot p_c.$$

仅当三角形等边且 P 是它的中心时，等号成立。

提示 应用不等式 $aPA\geqslant cp_b+bp_c$ 等以及定理8．

下面两个问题属于马来亚大学的A·奥本海姆（A.Oppenheim）教授；他把问题35B列为一个难题。

---

① American Mathematical Monthly, Volume 65, 521, 1958.

问题35A. 设 $q_a=p_b+p_c$，$q_b=p_a+p_c$，以及

$$q_c=p_a+p_b.$$

证明
$$PA\cdot PB\cdot PC\geqslant q_aq_bq_c.$$

问题35B. 证明

$$PB\cdot PC+PC\cdot PA+PA\cdot PB\geqslant q_bq_c+q_cq_a+q_aq_b.$$

问题36. 寻找三角形的厄尔多斯-莫德耳不等式在三维空间中的推广。我们注意，尽管正确的推广已经为人所知了，但是还没有人发现它的证明。包含着从四面体内的一点 P 到四面体的面、棱和顶点的距离的其它可能的不等式是什么？

问题37. 在一个给定的凸四边形中，哪一点到各顶点的距离之和最小？如果四边形不是凸的，解是什么？

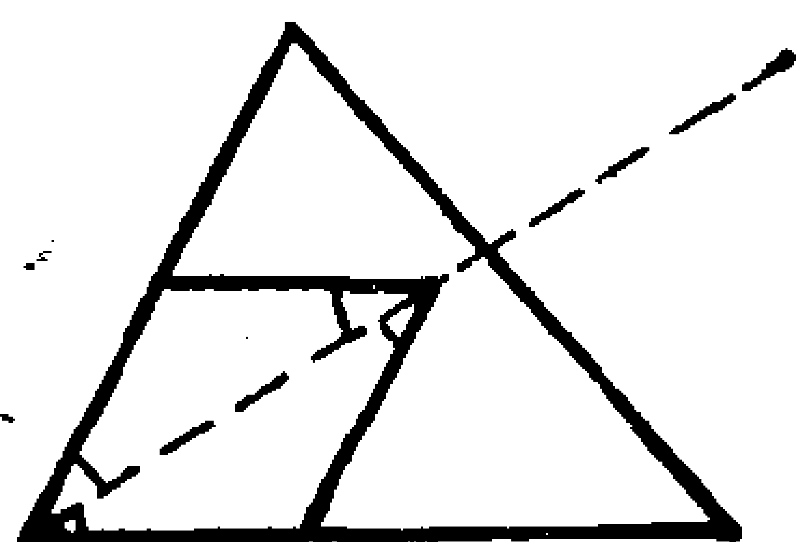


图 3.25

问题38. 用三角形代替四边形，上述问题的解是什么？首先考虑锐角三角形。

问题39. 在给定的三角形内，求最大的菱形，它的一个角是三角形的一个角；见图3.25。

问题40. 假设三角形 ABC 的边符合关系 $a<b<c$。如果 s_a,s_b,s_c 分别是从顶点 A,B,C 出发的中线的长度，又如果 f_a,f_b,f_c 分别是从这些顶点出发的角平分线的长度，试证明：

$$s_a>s_b>s_c\quad 和\quad f_a>f_b>f_c.$$

问题41(厄尔多斯). 设 P 是三角形 ABC 内的任一点，又假设 AP,BP 和 CP 的延长线分别交各边于 A',B' 和 C'。证明 $PA'+PB'+PC'$ 小于三角形最长边的长度。

问题42. a,b,c 和 d 是正数。证明

(a) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$蕴涵着 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$。

(b) $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(c) $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$。

(d) $\left(1+\frac{1}{6a}\right)^{-a}>\frac{5}{6}$，　$a=1,2,3,\ \cdots$。

问题43. 在通过某定角C内部的一个定点H的直线从该角切下的所有三角形(见图3.26)中，哪一个的面积最小？

问题44. 设区域$ABDC$(见图3.27)是凸的，又设AB与CD平行。BD的切线EF必须在什么位置才使$AEFC$的面积最小？(直线段EF与曲线BD相切：如果EF和BD至少有一个公共点，而且BD的不在EF上的所有点都位于EF的同一侧。)

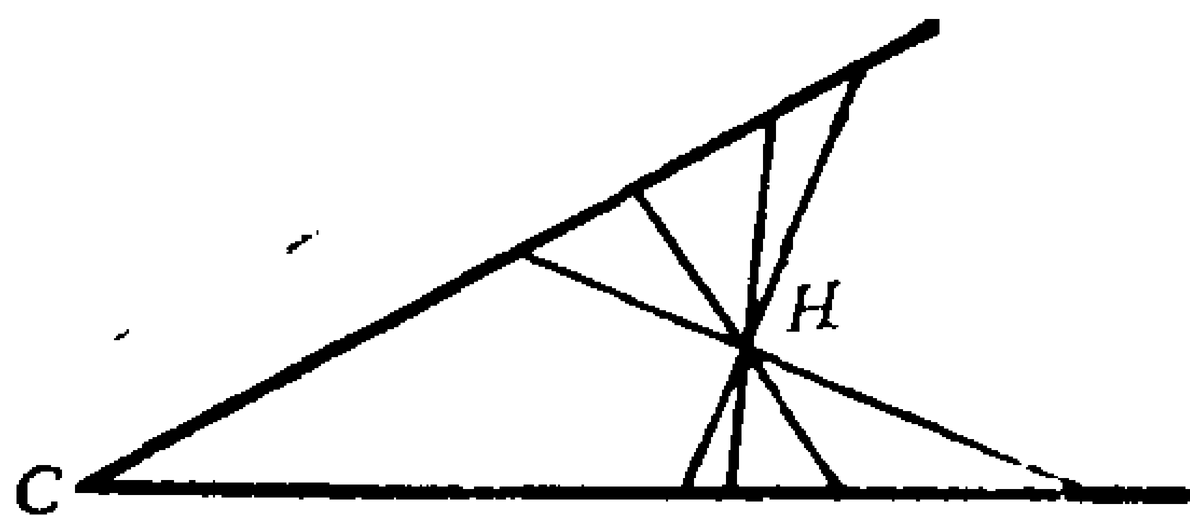


图 3.26

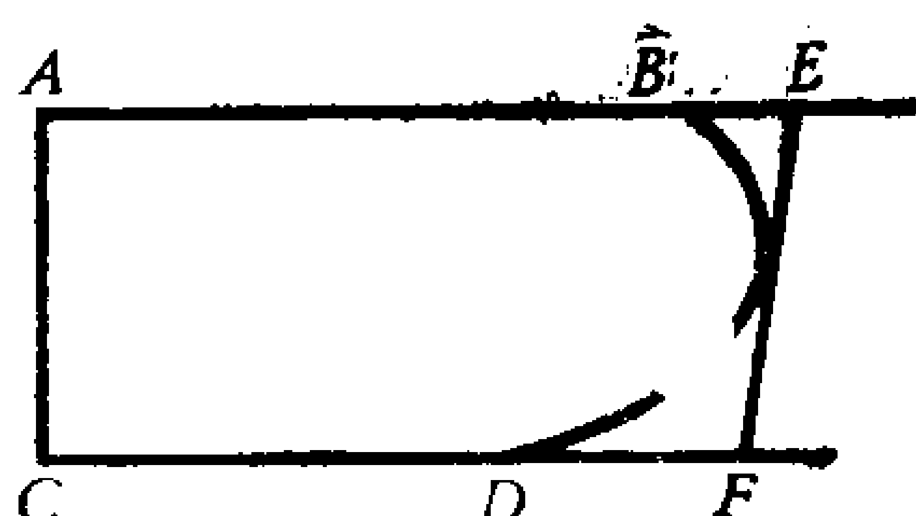


图 3.27

问题45(费叶思-托特)。 在球的表面上，两点间的距离是以这两点为端点的大圆上的最短弧的长度。考虑球表面上的n个点，又设S是这些点的不同对子之间的距离的总和。人们会问：这n个点处于什么位置时，产生S的最大值S_n？当$n=2,3,4,5,6$时，这个问题已经解决了。给出当$n\leqslant 4$的解。你能猜出S_{2k}和S_{2k+1}的值是什么吗？你能给出S_n的一

个不等式吗？

问题46. 一个三角形的最短的面积平分弦是哪一条？最长的又是哪一条？

提示 首先证明以下的定理。

定理 在具有一个公共角的面积相同的两个三角形中，夹该角的两边长度之差较小的三角形有较短的底边。

问题47. 在问题46中用“周长”代替“面积”，并解决这个新问题。

问题48. 设Q是周长为P的凸四边形。假设l和m是两条垂直的弦，它们把Q的周长分成四等份。证明如果L是m和l的长度之和，则$L \geqslant P/2$，且仅对矩形等号成立。这个问题除特殊情形外还未解决。

第四章　提示和解答

关于怎样解决问题和证明定理，我所能提出的最好的劝告是：去干，去实践；构造例子来作为一般提法的证据和提示；考虑特殊情形；做出猜测并决定你的例子是肯定它们还是否定它们；力图利用或经过修改再利用你曾经在别的场合应用过或碰到过的推理；如果你已经陷入困境，那就干脆休息，然后在另一天重新开始你的努力；使用笔和纸；保留一份你的思路的记录．总之，你越富于好奇心，你将获得的经验就越多，你将学到的东西也就越多．思考数学，研究数学，享受数学中的乐趣吧！

要想知道以上说到的乃至更多的建议的详尽的发挥和阐述，我建议你们去读G·波利亚（G·Pólya）的书《怎样解题》①和《数学与似真推理》②．当你所有的尝试都失败了以后，你可以问心无愧地阅读下面给出的提示和解答，但是，只应当读到使你能自己独立地续完解答所需要的那么多为止．

最好记住可把问题分成三类：不能解决的；认为我自己能解决的以及已经解决了的．当你已经完成了你的解答——这就是说你已经把它写出来了，使得某个还不知道解而且还爱大惊小怪和挑毛病的人能够读懂它，而不必再添进那些被

---

① How to Solve It, Princeton University Press, 1945.

② 特别是第一卷．Mathematics and Plausible Reasoning, Princeton University Press, 1954.

你在叙述中忽略掉的细节——之后，把书中的证法与你的比较比较。一旦你知道了一个问题是怎样解决的，一个定理是怎样证明的之后，再试图给出一个不同的解法或证明。你能改进你已经求出的解或者改进我给出的解吗？顺便提一句，如果你解决了这本小册子中提到的某个没有解决的问题，请把你的解答寄给《美国新数学丛书》的编者或者寄给我。

下面并不讨论书中给出的所有的问题和练习。在讨论一个特定的问题时，也可能只给出一个提示或解的一部分。有时还会提到别的问题和定理。几乎每个解答都有进一步的工作可做。在写出每个解时，我假设读者已经熟悉了问题，并且认真地尝试过去解决它。

练习 1. 定义 1 给出$7<9$；利用$p=1/2$的定理 4，我们得出$\sqrt{7}<3$。现在可从定理 2 推出要求的结论。∎

练习 4. $\sqrt{1/3}+\sqrt{2/7}$较大。我们可这样去发现它：如果

$$\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{5}}<\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{7}},$$

则按$p=2$的定理 4，

$$\frac{5}{12}+2\sqrt{\frac{5}{60}}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+2\sqrt{\frac{2}{21}}+\frac{2}{7}$$

或
$$\frac{5}{12}+\sqrt{\frac{20}{60}}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{8}{21}}+\frac{2}{7};$$

因此，
$$\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{8}{21}}<\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{5}{12}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5\cdot 7\cdot 12}.$$

但是$8/21>1/3$。所以，上面不等式的左端项是一个负数，不等式确实成立。

按照与上述步骤相反的次序写出一个细致的证明，并在必要处加以补充。

问题 1. 我们首先证明

$$\frac{2k-1}{2k}>\frac{\sqrt{4k-3}}{\sqrt{4k+1}} \quad (k=1,2,3,\cdots,n). \qquad (*)$$

在显然正确的式子 $1>0$ 的两端加上 $16k^3-12k^2$，我们得到不等式

$$16k^3-12k^2+1>16k^3-12k^2$$

或

$$(2k-1)^2(4k+1)>(2k)^2(4k-3),$$

按定理 3 和 4，它与(*)等价。(在动手做的时候，可从假设(*)为真开始，化归 $1>0$，然后把步骤倒过来就可得到一个证明。)

对从 1 到 n 的每个整数，不等式(*)分别是：

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{3}{4}>\frac{\sqrt{5}}{3},\ \cdots,\ \frac{2n-3}{2n-2}>\frac{\sqrt{4n-7}}{\sqrt{4n-3}},$$

$$\frac{2n-1}{2n}>\frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}}.$$

所有左端项的乘积是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}.$$

所有右端项的乘积是

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{4n-7}}{\sqrt{4n-3}}\cdot\frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}}=\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

从而，按定理 3，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

首先证明

$$\frac{2k-1}{2k}=\frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}\quad(k=1),$$

$$\frac{2k-1}{2k}<\frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}\quad(k=2,3,\cdots,n),$$

然后，与前面的证法类似进行就可建立问题 1 的第二个不等式。

问题 2.

$$\frac{b_1}{b_2}+\frac{b_2}{b_3}+\frac{b_3}{b_4}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{b_n}+\frac{b_n}{b_1}\geqslant n$$

$(b_i>0, i=1,2,\cdots,n)$是要求的不等式。仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时，等号成立。

注意

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{b_2}{b_3}\right)\cdots\left(\frac{b_n}{b_1}\right)=1.$$

问题 3.

$$\log_{10}a=(\log_a 10)^{-1}$$

是 $\log_{10}a$ 和 $\log_a 10$的定义的一个推论。要看出这一点，可设 $\log_a 10=N$。则有

$$a^N=10\quad 和\quad a=10^{1/N},$$

所以

$$\frac{1}{N}=\log_{10}a.$$

现在用定理 6 即可。(如果你需要更详细一些，请注意

$$\log_{10}a+\log_a 10=\log_{10}a+\frac{1}{\log_{10}a},$$

设$\log_{10}a=x$，并用第16页的不等式(3)。)。

问题4.

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{\underbrace{a\cdot b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n+1\text{个因子}}}$$

$$\leqslant\frac{\overbrace{a+b+\cdots+b}^{n+1\text{项}}}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}. \quad (\text{定理 }8)$$

仅当$a=b$时等号成立。▌

问题5.

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n<\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n \quad (\text{定理 }8).$$

但是

$$1+2+3+\cdots+n$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}1 & +\ 2 & +\ 3 & +\cdots+n-1 & +n\\ +n & +n-1 & +n-2 & +\cdots+\ 2 & +1\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.$$

所以，按定理1，

$$n!<\left[\frac{n(n+1)}{n\cdot2}\right]^n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

这就是要证明的。▌

问题6. 如果a，b和c是正数，那么

$$ab+bc+ca\geqslant3(ab\cdot bc\cdot ca)^{1/3}$$
$$=3(abc)^{2/3} \quad (\text{定理 }8);$$

和 $a+b+c\geqslant 3(abc)^{1/3}$，（定理8）。

所以，按定理3，如果a，b和c是正数，那么

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geqslant 9abc.$$

如果$a=b=c$，则等式成立。如果a，b和c中至少有两个是零，等式也成立。在所有其它的情形下，不等式成立。

问题7. 解法1．可把乘积中的项安排如下：

$$\left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_i}\right)=\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_n}$$
$$+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)$$
$$+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{a_n}+\frac{a_n}{a_2}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

分别考虑每一行中的项并利用第16页上的不等式(3)，我们得到，除第一行外，各行中的每一项都大于2，所以

$$\left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_i}\right)\geqslant n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 2+\cdots$$
$$+[n-(n-2)]\cdot 2+1\cdot 2;$$

或

$$\left(\sum_1^n a_i\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_i}\right)\geqslant 2\left[\sum_{k=1}^n (n-k)\right]+n$$
$$=2\frac{n(n-1)}{2}+n=n^2.$$

仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时，等式成立。▎

解法 2. 各项的另一种排法是

$$\left(\sum_{1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

$$=\frac{a_1}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+\cdots+\frac{a_1}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}$$

$$+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_2}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_2}{a_{n-1}}+\frac{a_2}{a_n}$$

$$+\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_3}{a_3}+\cdots+\frac{a_3}{a_{n-1}}+\frac{a_3}{a_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{a_{n-1}}{a_1}+\frac{a_{n-1}}{a_2}+\frac{a_{n-1}}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$+\frac{a_n}{a_1}+\frac{a_n}{a_2}+\frac{a_n}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_n}{a_n}.$$

在这个和中恰好有 n^2 项，每行 n 项，共有 n 行。观察各行和各列，我们看出正好有 n 项对从 1 到 n 的每个 k 有分子 a_k，又正好有 n 项对从 1 到 n 的每个 k 有分母 a_k。所以，所有的这 n^2 个正分数的乘积是 1；因此，按定理 6，它们的和至少是 n^2。当且仅当它们全相等时，即当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等式成立。▌

你还能找出别的解法吗？——它包含了对上面的 n^2 项和的对角线项应用问题 2 的结果。

问题 8. 下面给出发现证明的一条思路。如果

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

于是，按定理 4，

$$|a|^2-2|a|\cdot|b|+|b|^2\leqslant|a+b|^2\leqslant|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2$$

但$|a|^2=a^2$，$|b|^2=b^2$，$|a+b|^2=(a+b)^2$。所以，如果我们从后一不等式所有的三项中减去a^2和b^2，就得到结果

$$-2|a|\cdot|b|\leqslant 2ab\leqslant 2|a|\cdot|b|.$$

由于$|a|\geqslant a$和$|b|\geqslant b$，于是$|a|\cdot|b|\geqslant ab$.（为什么？）所以，

$$-2|a|\cdot|b|\leqslant 2ab\leqslant 2|a|\cdot|b|$$

是真的。

为写出证明，我们必须能把上述步骤的次序倒回去。这样的逆转不一定是可能的。例如，如果$x>y>1$，则$x^2>y^2>1$；但若$x^2>y^2>1$，却并不一定有$x>y>1$；比如假设$x=-4$和$y=-3$。不过，在我们所讨论的情况下，是能够把这些步骤倒回去的。

证明 显然有$|a|^2=a^2$，$|b|^2=b^2$，$|a|\cdot|b|\geqslant ab$，又$-|a|\cdot|b|\leqslant ab$。所以，按定理2，

$$|a|^2-2|a|\cdot|b|+|b|^2\leqslant a^2+2ab+b^2$$
$$\leqslant|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2.$$

由于$(a+b)^2=|a+b|^2$，利用$p=1/2$的定理4，我们可从最后的不等式得到要求的结论。▌

注意不等式$|a|-|b|\leqslant|a+b|$实际上蕴涵着$||a|-|b||\leqslant|a+b|$。（这些不等式对任何实数a和b都成立。）

数$|a+b|$是实线上从点a到点$-b$的距离。数$|a|+|b|$是从a到原点的距离加上从b到原点的距离。于是，右边的不等式蕴涵实线上两点间的距离（a和$-b$可以表示依赖于a和b的值的任何一对点）小于或等于它们到原点的距离之和。这个几何说法对应于三角不等式，即三角形的两边长度之和大于第三边的长度。类似地，左边的不等式等价于实线上两点间的距离大于或等于它们到原点的距离之差，并对应于另一个熟知的三角不等式。

你能够证明和解释下面的不等式吗？

(i) $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$。

(ii) $|a-c|-|b-c|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a-c|+|b-c|$。

如果 a 和 b 是复数，则仍有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

并且对于复数，这个不等式的几何解释也是上面引用的三角不等式。

问题9. 设△是面积为T，周长为P的三角形。设$\triangle_1$是和△有相同的底边及周长，但面积为T_1的等腰三角形。最后，设$\triangle_2$是和△有相同底边及面积，但周长为P_2的等腰三角形。把定理10B应用于△和$\triangle_2$得$P\geqslant P_2$。于是，虽然$\triangle_1$和$\triangle_2$是有公共底边的两个等腰三角形，但$\triangle_1$的周长至少和$\triangle_2$的周长一样大。从而，$\triangle_1$的面积至少和$\triangle_2$的面积一样大；也就是说，$T_1\geqslant T$。 ▎

给定三角形△，作三角形$\triangle_1$和$\triangle_2$。你可亲眼见到定理确实成立。

问题10. 我来证明定理11A 蕴涵定理 11B。设△是面积为T，周长为P的任一三角形。设$\triangle_1$是面积为T，周长为P_1的等边三角形。最后，设$\triangle_2$是面积为T_2，周长为P的等边三角形。把定理11A应用于△和$\triangle_2$得$T_2\geqslant T$。而在两个等边三角形中，面积较大的那一个有较大的周长(反之，周长较大的那一个也有较大的面积)。于是，比较$\triangle_1$和$\triangle_2$，我们就得出结论$P_1\leqslant P$。 ▎

问题11. 在赫伦公式(7′)的两端同除以$16T^2$,我们有结果

$$\frac{P^{1/3}(P-2a)}{(16T^2)^{1/3}}\cdot\frac{P^{1/3}(P-2b)}{(16T^2)^{1/3}}\cdot\frac{P^{1/3}(P-2c)}{(16T^2)^{1/3}}=1.$$

上面乘积中的每个因子都是正的，所以我们应用定理6可得，这三个乘积为1的数当它们都相等时，其和最小，这个和是

$$\left(\frac{P}{16T^2}\right)^{1/3}(P-2a+P-2b+P-2c),$$

即

$$\frac{P^{4/3}}{(16T^2)^{1/3}}.$$

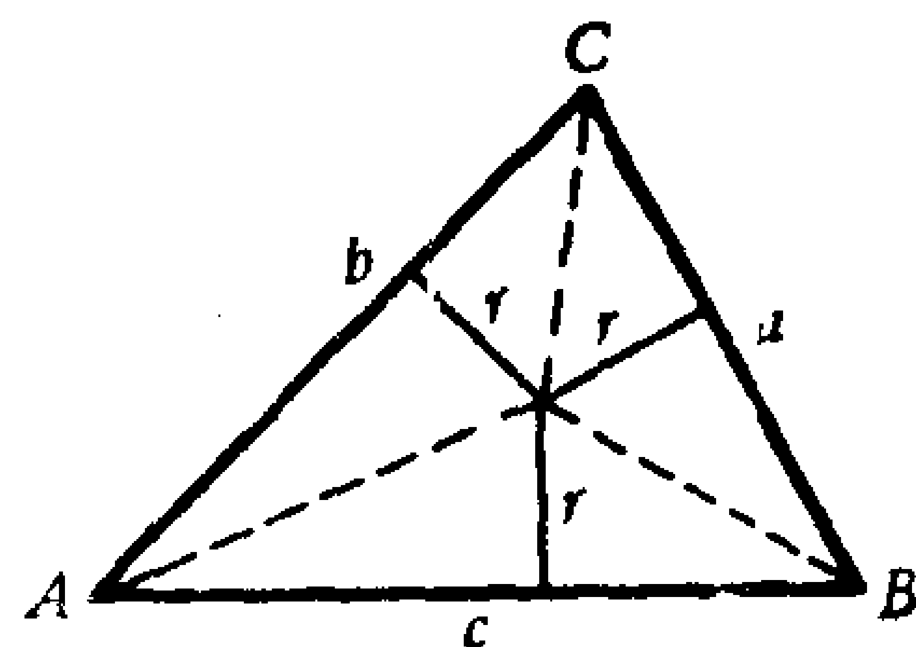


图 4.1

而当$P-2a=P-2b=P-2c$时，即当$a=b=c$时，这三个数相等。由于T固定，这意味着当$a=b=c$时，P最小。▌

问题12. 在两种情形下，等边三角形都是极端图形。

提示 利用定理：在具有相同周长(或面积)的所有三角形中，等边三角形有最大的内切圆。

证明 对任一三角形ABC，$2T=rP$，其中r是它的内切圆的半径。这是由于

$$T=a\cdot\frac{r}{2}+b\cdot\frac{r}{2}+c\cdot\frac{r}{2}=(a+b+c)\frac{r}{2}=P\cdot\frac{r}{2}.$$

定理11A说，对固定的P，当ABC是等边三角形时，T最大。因此，对固定的P，我们从关系式$2T=Pr$看出，当ABC等边时，r最大。如果T是固定的，也能类似地证明。▌

问题12的部分解答. 设△是一个外切于给定的半径为r的圆的三角形，又假设△有周长P和面积T。设$\triangle_E$是外切于同一个圆的等边三角形，用T_E和P_E分别表示它的面积和周长。最后，设$\triangle_1$是周长为P的等边三角形，把它的内切圆半径叫做r_1。把上面的定理用于△和$\triangle_1$，我们得出$r_1\geqslant r$。

但是，如果一个等边三角形$\triangle_1$，比另一个$\triangle_E$有较大的内切圆半径，它也就有较大的面积和周长。所以$P \geqslant P_E$。 ▎

问题13. 如果有人想要介绍一个很长的证明，或者要用一个包含很啰嗦的步骤的推理，首先解释一下他将要做什么，永远是个好办法。现在这个问题的解正好就是这样。问题13中提出的两个问题的答案是：

定理 A 在内接于一个给定圆的所有三角形中，等边三角形有最大的周长。

定理 B 在内接于一个给定圆的所有三角形中，等边三角形有最大的面积。

我们要介绍第一个定理的一个完整的证明，并对怎样证明第二个定理提出建议。定理A的证明有两个主要部分。我们首先证明

定理 C 在内接于一个给定圆并且有相同底边的所有三角形中，高最大的等腰三角形有最大的周长。

然后再证：在内接于给定圆的所有等腰三角形中，等边三角形有最大的周长。

定理C的证明 设ABC是有固定顶点A和B的内接三角形。我们分别用α，β和γ表示A，B和C处的角。当顶点C沿圆周移动时，角γ保持常值。假设γ的平分线交AB边于X。设AD和BE是画到CX(或其延长线)的垂线(图4.2)。那么

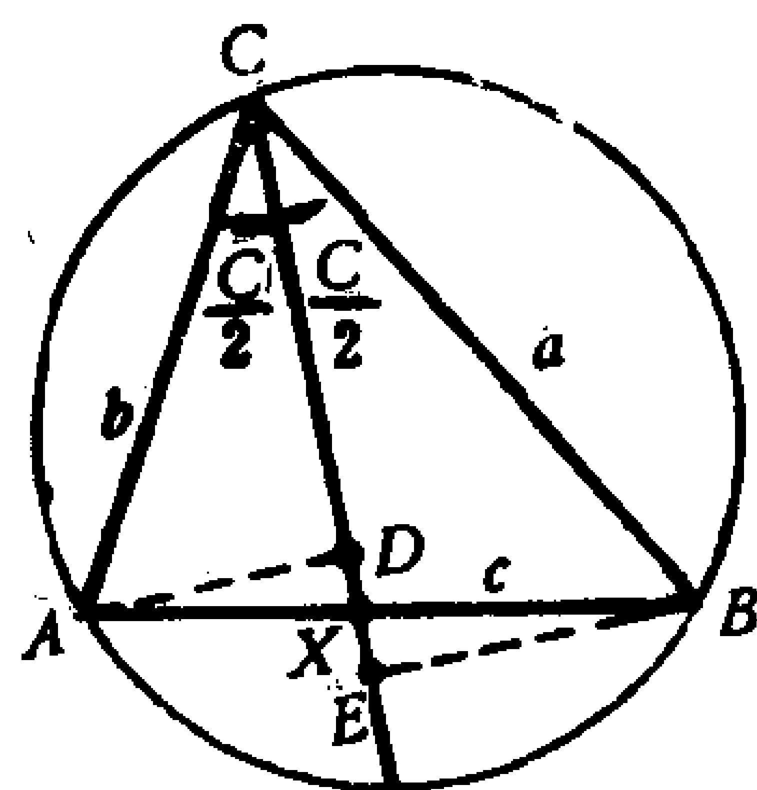


图 4.2

$$b \sin\frac{1}{2}\gamma = AD, \qquad a \sin\frac{1}{2}\gamma = BE$$

和 $$(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}=AD+BE. \qquad (*)$$

在图 4.2 的情形下，还有

$$\angle AXD=\beta+\frac{1}{2}\gamma,$$

因此

$$\angle XAD=\angle EBX=\frac{1}{2}\pi-\left(\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\left(\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

所以

$$AX\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=AD, \qquad BX\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=BE,$$

和

$$(AX+BX)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=c\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=AD+BE. \qquad (**)$$

(*)和(**)的一个推论是

$$(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma=AD+BE=c\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

或 $$(a+b)=\frac{c\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

角γ固定，又当 $\alpha=\beta$ 时，也就是说，当 ABC 是等腰三角形时 $\cos(\alpha-\beta)/2$ 最大。所以当ABC是等腰三角形时，$a+b$ 最大。除$\gamma=90°$外，按C位于AB的这一侧或另一侧，γ有两个

可能的值．对固定的A和B，在两个可能的等腰三角形ABC中，较小的γ对应于较大的$a+b$；它也对应于从C到AB的较长的高．▎

借助这个定理，容易证明：内接于一个给定圆的非等边的等腰三角形并不是内接于这个圆的周长最大的那个三角形；我们只需取三角形的一个等边作为新的底边，并在这个底边上内接一个等腰三角形(见图 4.3)．按照定理，新三角形有比给定的三角形更大的周长．由于我们尚未证明，在给定的圆中，最大周长的三角形存在，所以上述的增大非等边三角形周长的方法不能看成极大图形存在性的证明．因而我们需要从一个不同的观点来探讨定理A．

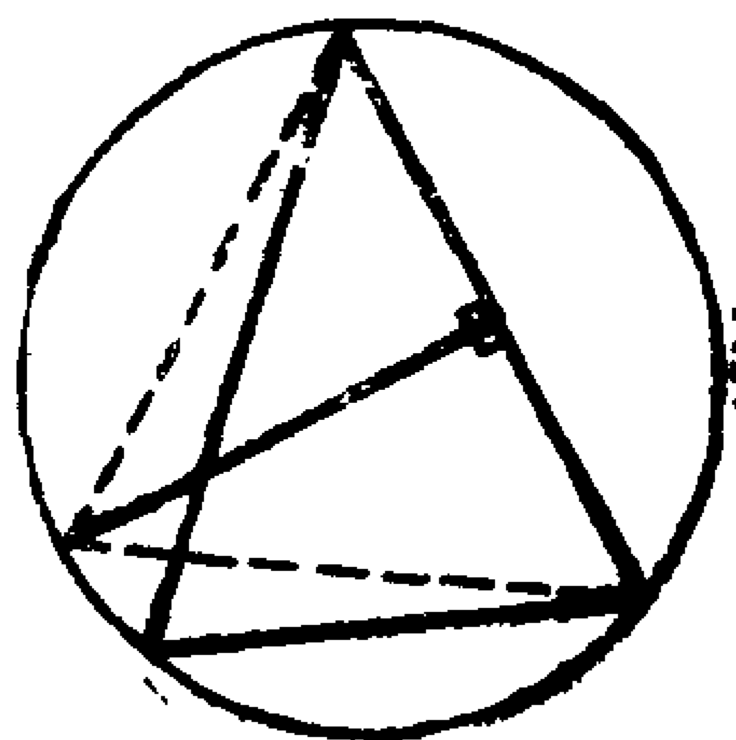


图 4.3

定理A的证明　考虑到定理 C,我们需要证明的全部事情只是：在内接于给定圆的所有等腰三角形中，等边三角形有最大的周长．设$\triangle ABC$是等腰三角形(见图4.4)，设CC'是垂直于AB的直径，又设AO是给定圆的一条半径，且$AO=R$．我们首先要说明，当$AC'=R$时，周长$2a+c$最大．由于在这种情况下，$\triangle ABC$必是等边三角形，定理就证完了．

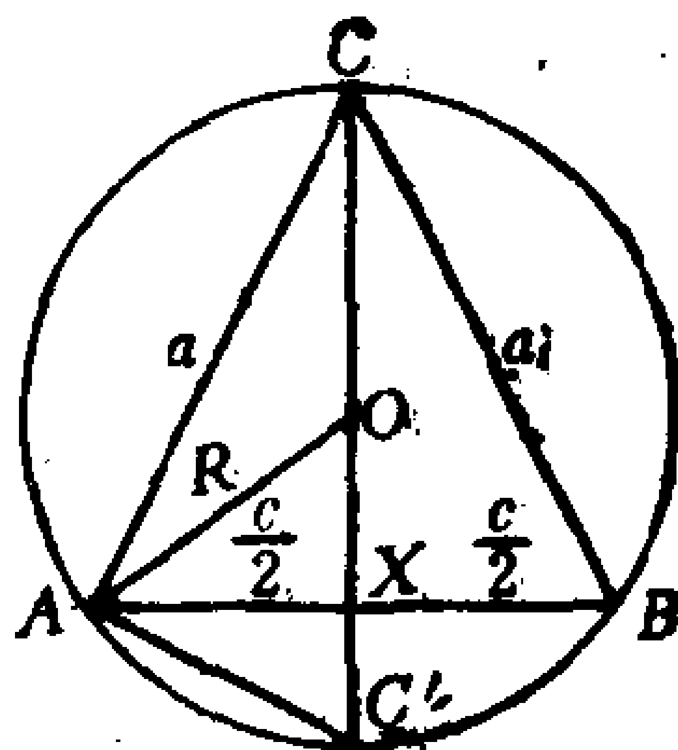


图 4.4

按勾股定理，

$$a=\sqrt{4R^2-AC'^2} \quad 和 \quad \frac{c}{2}=\sqrt{AC'^2-C'X^2}.$$

由于三角形$AC'C$与$AC'X$相似，

$$\frac{C'X}{AC'}=\frac{AC'}{2R} \quad \text{或} \quad C'X=\frac{AC'^2}{2R}.$$

从而，

$$\frac{c}{2}=\sqrt{AC'^2-\left(\frac{AC'^2}{2R}\right)^2}=\frac{AC'}{2R}\sqrt{4R^2-AC'^2}$$

和

$$a+\frac{c}{2}=\sqrt{4R^2-AC'^2}\left(1+\frac{AC'}{2R}\right)$$

$$=\frac{1}{2R}\sqrt{2R+AC'}\ \sqrt{2R-AC'}\,(2R+AC').$$

我们希望求出在什么条件下，$P=2(a+c/2)$ 最大。由于R是固定的，当 $6R^2P^2$ 最大时，P 将最大。我们首先注意到

$$6R^2P^2=12R^2\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$=(2R+AC')(2R+AC')(2R+AC')(6R-3AC').$$

其次，我们注意到 $2R>AC'$，而且右端四个因子之和是$12R$，它不依赖于AC'。这样我们就能利用定理7，当给定总和的四个正数全相等时，其乘积最大。使所有的因子相等的AC'的值由等式

$$6R-3AC'=2R+AC'$$

确定；结果是

$$AC'=R.$$

所以，$c=a$，$\triangle ABC$ 是等边三角形。▎

证明定理10A 与10B 的等价性的方法，现在也能用来证明定理 B：

在内接于一个给定圆的所有三角形中，等边三角形有最

大的面积。

不过，这个方法不能用来证明定理B蕴涵定理A。

定理B等价于下述命题。

定理 内接于一个圆的等边三角形的边长之积，大于内接于同一个圆的任何其它三角形的边长之积。

证明 对任一三角形 ABC(见图4.5)，

$$T=\frac{ab\sin C}{2} \quad 和 \quad \sin C=\frac{c}{2R}; \quad 即 \quad T=\frac{abc}{4R}.$$

由于R是固定的，我们得出结论：当$a\cdot b\cdot c$最大时，即当$a=b=c$时，T最大。▌

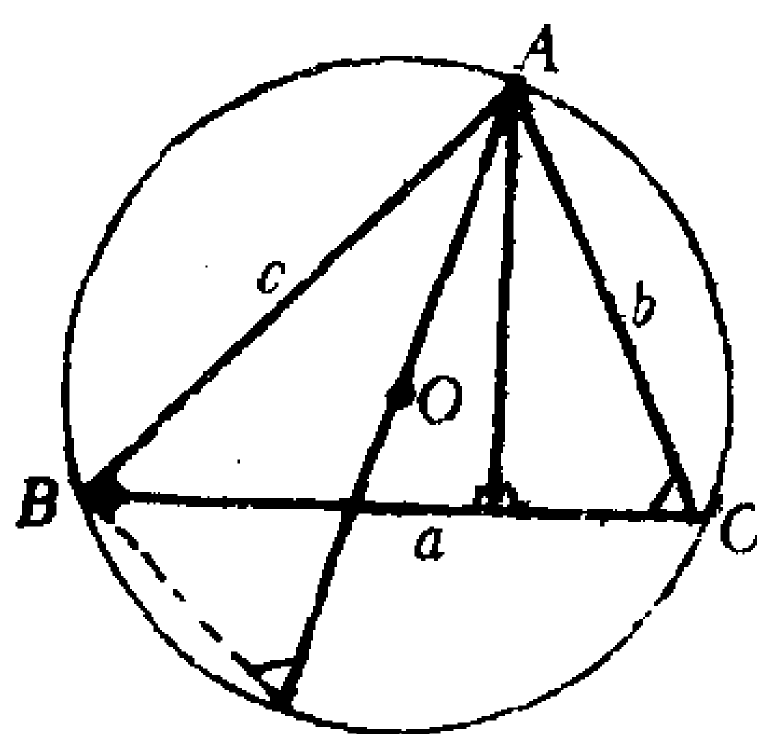


图 4.5

以上的讨论阐明了数学中的一个普遍现象：简单的问题往往需要大量的劳动才能回答。

问题14. **定理** 在具有给定周长的所有三角形中，等边三角形有最小的外接圆。

证明 设△是外接圆半径为R，周长为P的三角形。设$\triangle_E$是外接圆半径为R，周长为P_E的等边三角形。最后，设$\triangle'$是外接圆半径为R'，周长为P的等边三角形。根据问题13的结果，$P_E\geqslant P$。所以

$$R\geqslant R'. \quad ▌$$

包含面积而不是周长的定理可类似地叙述和证明：我们只要把上个定理及其证明中所出现的周长简单地换成面积就行了。

问题15. 设一个盒子的尺寸是a,b和c，而且开的一端的棱长是a和b；用S和V分别表示它的表面积和体积。则

$$S=2ac+2bc+ab \quad 和 \quad V=abc.$$

根据定理 8，

$$[(2ac)(2bc)(ab)]^{1/3}\leqslant\frac{S}{3}.$$

由于$(abc)^{2/3}=V^{2/3}$，这个不等式等价于

$$V^{2/3}\leqslant\frac{S}{3\cdot 2^{2/3}} \quad 或 \quad V\leqslant\frac{S^{3/2}}{2\cdot 3^{3/2}}.$$

当且仅当

$$2ac=2bc=ab$$

时，即当且仅当

$$a=b=2c$$

时，V 取到它的最大值 $S^{3/2}/(2\cdot 3^{3/2})$。所以，体积最大的盒子是半个立方体。▌你能用第三章中讨论的反射原理来解决这个问题吗？

问题16. 与问题 15 的解答中同样来表示这个盒子的尺寸和体积。于是$2b+2c$是围长，而且

$$a+2b+2c\leqslant L.$$

按定理 8，有

$$(a\cdot 2b\cdot 2c)^{1/3}\leqslant\frac{a+2b+2c}{3}\leqslant\frac{L}{3}$$

或

$$2^{2/3}\cdot V^{1/3}\leqslant\frac{L}{3}.$$

所以

$$V\leqslant\frac{L^3}{2^2\cdot 3^3}.$$

要V达到它的最大值 $L^3/(3^3\cdot 2^2)$，需

$$a=2b=2c.$$

所以盒子的高 b 应与宽 c 相等，而它的长 a 应是它的宽的两倍(或是它的高的两倍)。

问题17. 设这个盒子的尺寸是 a, b 和 c. 于是它的棱长之和 L 是 $4(a+b+c)$。按定理 8，

$$(abc)^{1/3}\leqslant\frac{a+b+c}{3} \quad \text{或} \quad V^{1/3}\leqslant\frac{L}{12}.$$

所以，当且仅当 $a=b=c$ 时，体积 V 最大

$$V=(L/12)^3.$$

盒子的表面积 S 是

$$2(ab+bc+ca).$$

按定理 8，$2ab\leqslant a^2+b^2$，$2bc\leqslant b^2+c^2$ 以及 $2ca\leqslant c^2+a^2$。当且仅当 $a=b=c$ 时，在所有三个不等式中，等号成立。所以，

$$\begin{aligned}S\leqslant 2(a^2+b^2+c^2)&=2(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)\\&=2(a+b+c)^2-2S\end{aligned}$$

或

$$3S\leqslant 2\left(\frac{L}{4}\right)^2.$$

L 是固定的。因此当 $a=b=c$ 时，S 是一个最大值。

问题18. **提示** 设 M 是体积为 V 的四面体. 如果 M 的每个面都是等边三角形，则 M 是一个正四面体，这没有什么可证的。否则，选取不是等边三角形的一个面。保持 M 的体积固定，而把这个面变为面积相同的一个等边三角形，并移动与该面相对的顶点，直到它位于这个三角形的中心的上方，来使 M 变形. 这样的变形使表面积减小.(为什么？你能证明它吗？)因此，如果 M 不是体积为 V 的正四面体，必存在体积相同，但表面积较小的另一个四面体。根据假设，问题存在一个解。所以，正四面体必是那个解。

1884年 R. 斯图姆(Sturm)给出了这个定理的一个证明它具有斯坦纳证明三角形的等周定理的那种思想。他不假设极端四面体的存在。尽管这个证明是初等的，但却并不简单。

解 我们首先注意到不等式

$$(x^2+u^2)^{1/2}+(y^2+v^2)^{1/2}\geqslant[(x+y)^2+(u+v)^2]^{1/2}$$

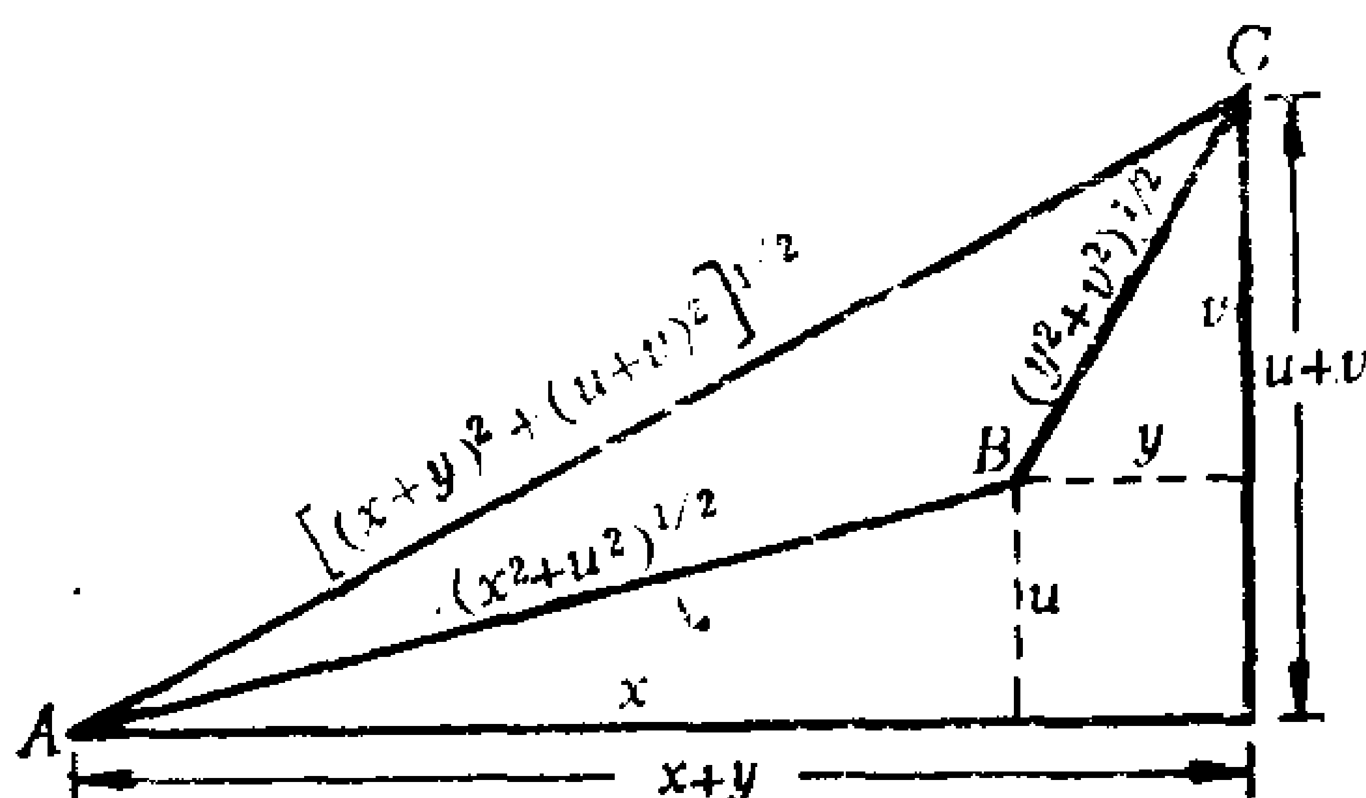


图 4.6

对任何正数x,y,u和v成立；按照图4.6，这个不等式等价于$AB+BC\geqslant AC$，类似地，不等式

$$(x^2+u^2)^{1/2}+(y^2+v^2)^{1/2}+(z^2+w^2)^{1/2}$$
$$\geqslant[(x+y+z)^2+(u+v+w)^2]^{1/2}$$

等价于$AB+BC+CD\geqslant AD$，这里$ABCD$是一条折线路径。稍后我们将要利用这个不等式。上面的不等式及其对n项和的推广是伟大的几何学家赫尔曼·闵可夫斯基(Hermann Minkowski，1864—1909)发现和证明的。

假设给定的四面体M有体积V和全面积S。如果M不是正四面体，则至少有一面不是等边三角形，我们可假设它是底面。我们用P表示底面周长，用A表示底面面积。现在假设N是从M变形得到的底面为等边三角形，与M有相同的高的四面体。那么N有体积V，全面积S^*，底面周长$P^*<P$，以及底面面积A。

设 h 是M和N的公共高(见图4.7)，设 a,b 和 c 是 M 的底面的边长，又设 e 是N的底面的边长。设 p_a,p_b 和 p_c 是从M的高在底面的垂足到各边的垂线的长度，又设 p 是N的

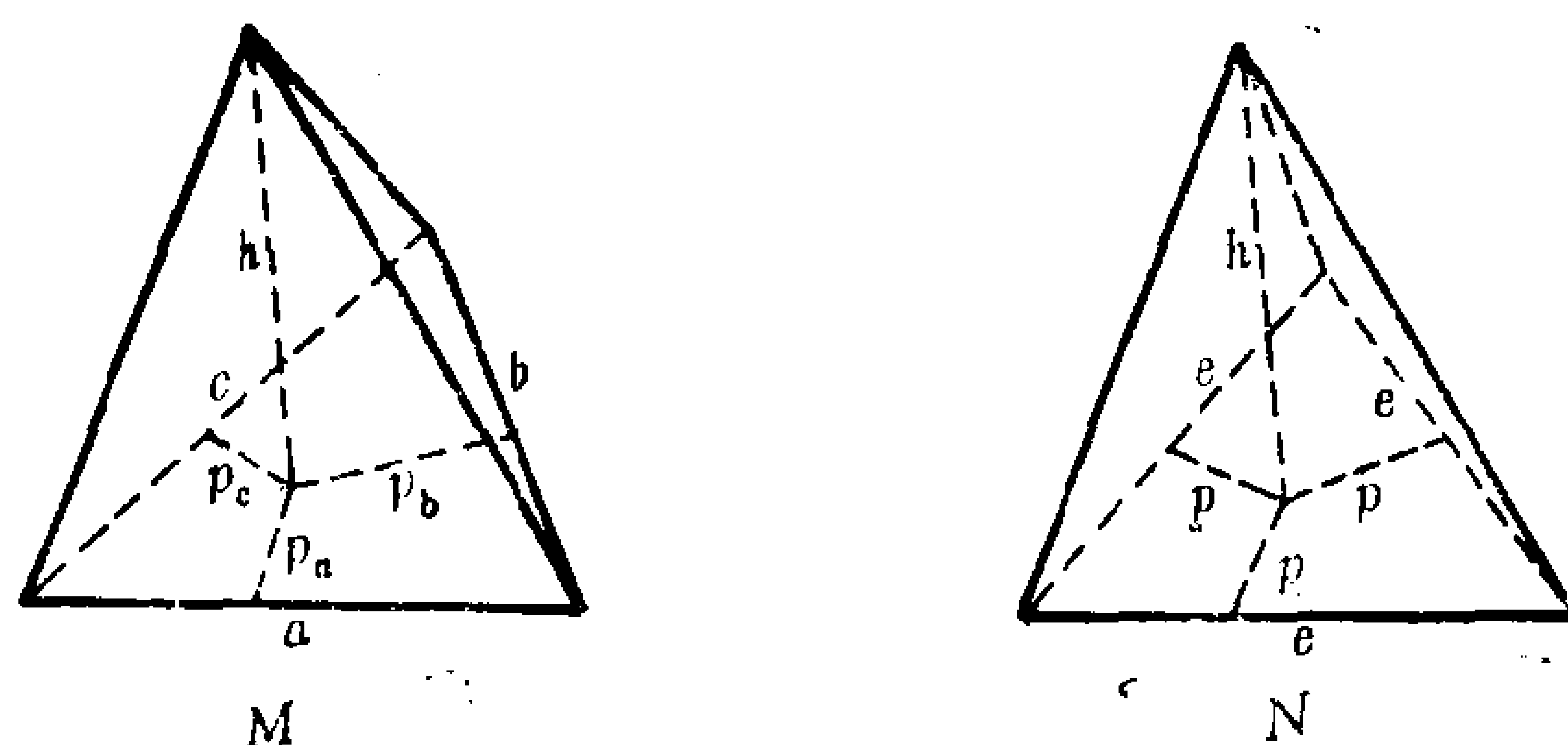


图 4.7

对应的垂线的长度．那么考虑M，我们知道

$$A=\frac{1}{2}(ap_a+bp_b+cp_c),$$

$$S=A+\frac{1}{2}[a(p_a^2+h^2)^{1/2}$$
$$+b(p_b^2+h^2)^{1/2}+c(p_c^2+h^2)^{1/2}]$$

和

$$2(S-A)=(a^2p_a^2+a^2h^2)^{1/2}+(b^2p_b^2+b^2h^2)^{1/2}$$
$$+(c^2p_c^2+c^2h^2)^{1/2}.$$

类似地，考虑N，我们知道

$$A=\frac{1}{2}(ep+ep+ep)=\frac{1}{2}(3e)p=\frac{1}{2}P^*p,$$

$$S^*=A+\frac{1}{2}[e(p^2+h^2)^{1/2}+e(p^2+h^2)^{1/2}$$
$$+e(p^2+h^2)^{1/2}]$$

$$= A + \frac{1}{2}P^*(p^2 + h^2)^{1/2}$$

和

$$2(S^* - A) = (P^{*2}p^2 + P^{*2}h^2)^{1/2}$$
$$= [(2A)^2 + P^{*2}h^2]^{1/2}.$$

我们现在令

$$ap_a = x, \quad bp_b = y, \quad cp_c = z; \quad ah = u,$$
$$bh = v, \quad ch = w,$$

并应用开始求解时所说的第二个不等式，于是

$$\begin{aligned} 2(S - A) &= (a^2p_a^2 + a^2h^2)^{1/2} + (b^2p_b^2 + b^2h^2)^{1/2} \\ &\quad + (c^2p_c^2 + c^2h^2)^{1/2} \\ &= (x^2 + u^2)^{1/2} + (y^2 + v^2)^{1/2} + (z^2 + w^2)^{1/2} \\ &\geqslant [(x + y + z)^2 + (u + v + w)^2]^{1/2} \\ &= [(ap_a + bp_b + cp_c)^2 + (ah + bh + ch)^2]^{1/2} \\ &= [(2A)^2 + P^2h^2]^{1/2} \\ &> [(2A)^2 + P^{*2}h^2]^{1/2} \\ &= 2(S^* - A). \end{aligned}$$

由$2(S - A) > 2(S^* - A)$，就可推出$S > S^*$。 ▌

问题19. 设一个双棱锥有体积V和表面积S。设子棱锥的底面积为a^2，高为h。那么，

$$V = \frac{2a^2h}{3}, \quad S = 4a\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2\right]^{1/2},$$

$$S^2 = 4a^2(a^2 + 4h^2).$$

提示 把S^2写成$4[a^4 + 2a^2h^2 + 2a^2h^2]$，利用$n = 3$的定理8，求方括号中和的最小值。

为了把这个定理推广到底面为正方形的斜双棱锥Q上去，首先把Q变成有同样的底面和体积的直双棱锥R。如果

对于构成Q的一个斜棱锥，从高在底面的垂足到底面各边的距离是x_1, x_2, x_3和x_4，则Q的侧表面积S是

$$2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}a[x_i^2+h^2]^{1/2}.$$

所以

$$\begin{aligned} S &= a\sum_{i=1}^{4}[x_i^2+h^2]^{1/2} \\ &\geqslant a\left[\left(\sum_{i=1}^{4}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{4}h\right)^2\right]^{1/2} \quad (\text{为什么？}) \\ &= a[(2a)^2+(4h)^2]^{1/2} \\ &= 4a\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

后者是R的表面积。

问题20. 遵照提示，我们首先注意到

$$A = n\left(r\cdot\frac{P}{2n}\right)=\frac{rP}{2}.$$

所以，
$$A^2=\frac{r^2P^2}{4} \quad 和 \quad A=\frac{r^2P^2}{4A}.$$

但$A>\pi r^2$(内切圆的面积)。从而，在上一个分数的分母中用πr^2代替A之后，我们有不等式

$$A<\frac{r^2P^2}{4\pi r^2}=\frac{P^2}{4\pi}.$$

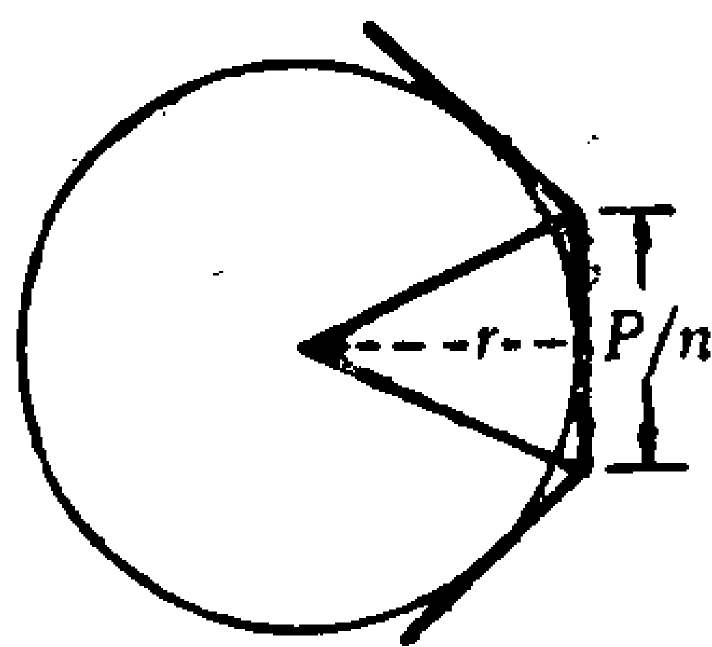


图 4.8

周长为P的圆的半径是$P/2\pi$；因此它的面积是$\pi(P/2\pi)^2$或$P^2/4\pi$。这样我们已经证明了周长为P的圆比周长为P的正n边形面

积更大。 ∎

问题21. 设能内接于一个圆的n边形的n条边被固连于n边形外的圆的部分上，这样就构成了n个可以运动的块(见图4.9)。假设它们的总面积是K。如果把这些块围成有同样边的任何一个n边形，则新图形与圆有同样的周长(如果这些块有重迭的话，那么它比圆的周长要小)。设T是新n边形的面积。根据等周定理，新图形(包括重迭部分)的总面积$T+K$小于圆的总面积。所以，$T<A$。 ∎

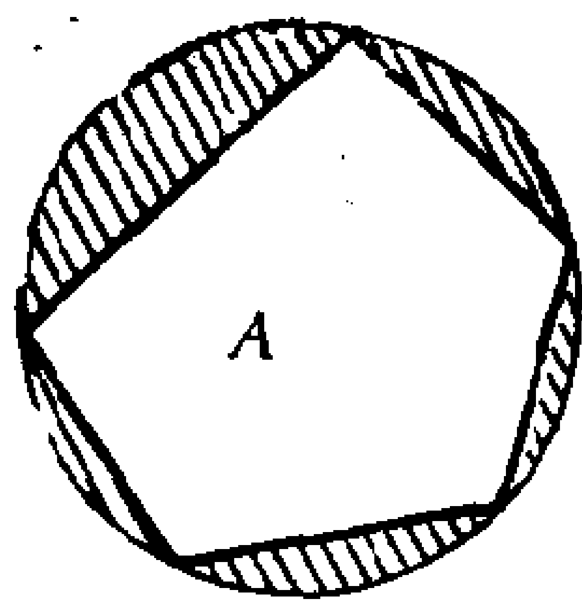


图 4.9

问题23. 提示 图4.10所画的每个图形都有同样的总周长$L+L'$。哪一个有较大的面积？为什么？

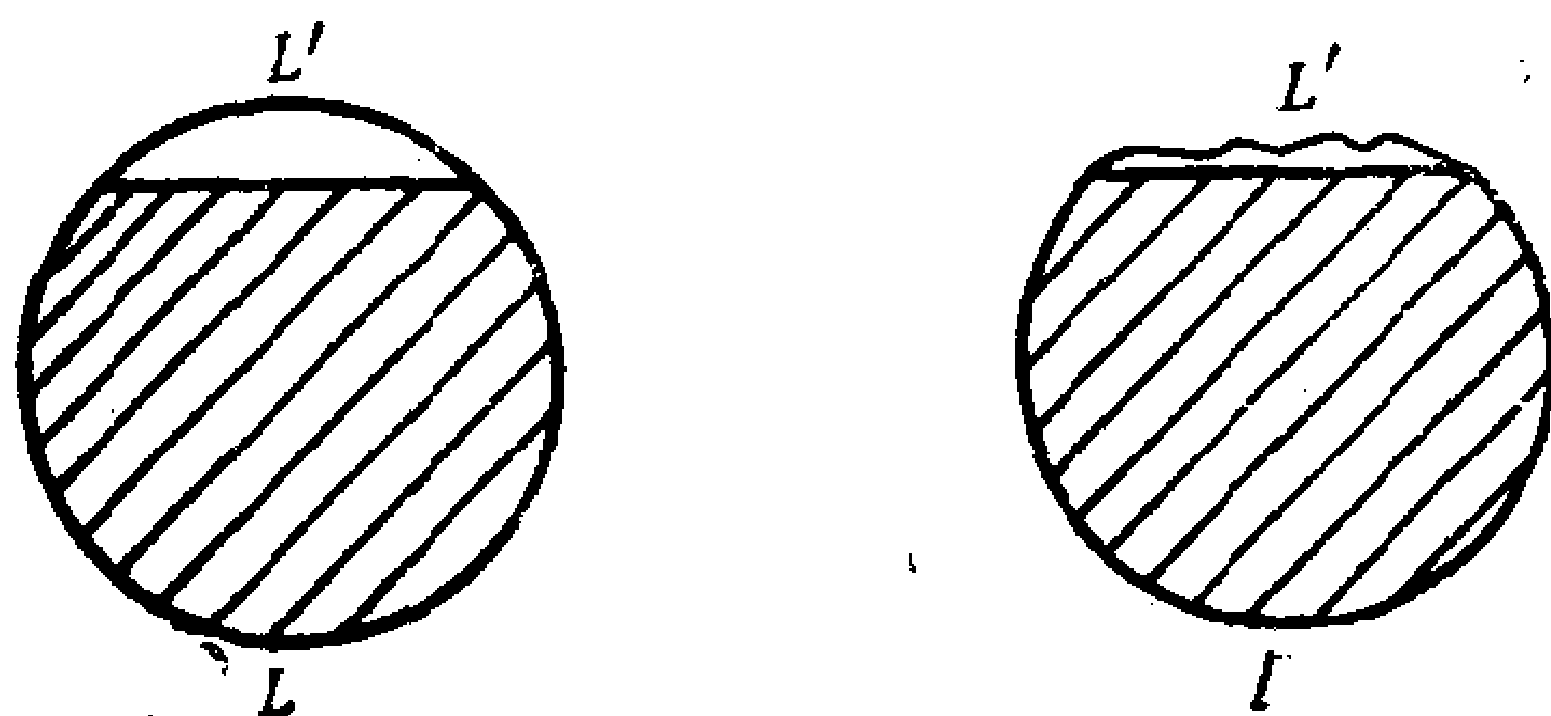


图 4.10

问题24. 提示 图4.11所画的边已标号的两个n边形有$n-1$条对应边相等并有同样的周长。

问题25. 提示 对于平面上给定的扇形的角是π/n，且$n=2,3,\cdots$的特殊情形，图4.12中已暗含了作法。在其它情形难以给出解来。

问题26. 问题是：求给定面积为S的曲面，它的一部分是面积为A的固定的圆盘($2A<S$)，使它包含最大的体积。

问题27. 提示 在图4.13中

$$PF_1 = PP_1 \quad 和 \quad PF_2 = PP_2,$$

这是因为从外部一点到同一球的切线的长度相等。

问题28. 设T是双曲线的任一点(见图4.14)。把它与焦点F_1和F_2联结起来，并作角F_1TF_2的平分线l。我们要证明l上任何其它的点P不在双曲线上，以此来说明l是切线。设F_2'是F_2关于l的反射，联结P与F_2,F_2'以及F_1。于是，

$$\begin{aligned}|PF_2 - PF_1| = |PF_2' - PF_1| &\leqslant F_1F_2' \\ &= |TF_2' - TF_1| = |TF_2 - TF_1|,\end{aligned}$$

并且仅当点P,F_2'和F_1共线时，等号成立。但仅当P是T时才如此。这样一来，l仅在一个点和双曲线相交，而所有其它的点都位于双曲线的满足

$$|PF_2 - PF_1| < |TF_2 - TF_1| = 常数 = k$$

的那一边。我们可把这一面称为双曲线的“外部”。注意双曲线的“内部”，也就是满足不等式

$$|PF_2 - PF_1| > k$$

的点P的全体，是由两个分离的平面区域组成的。

问题29. 提示 由两条直线构成的顶角的平分线是互相垂直的。

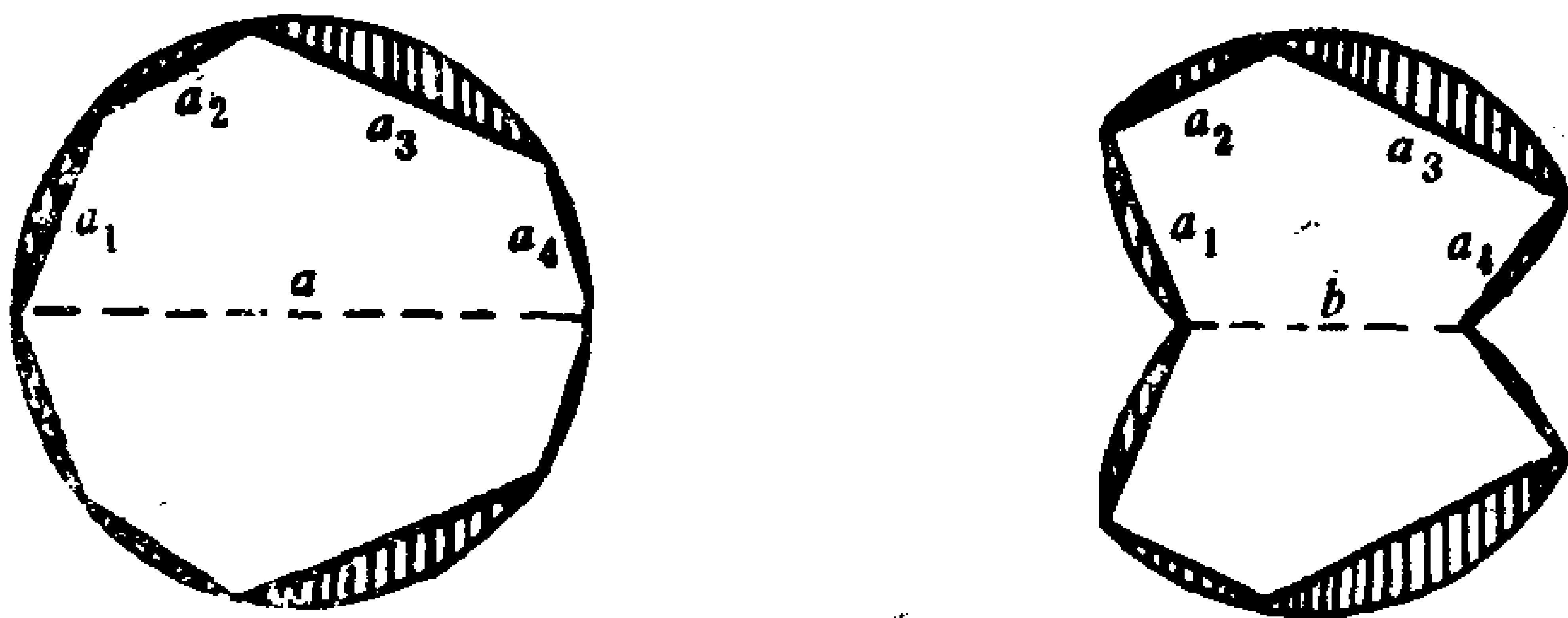


图 4.11

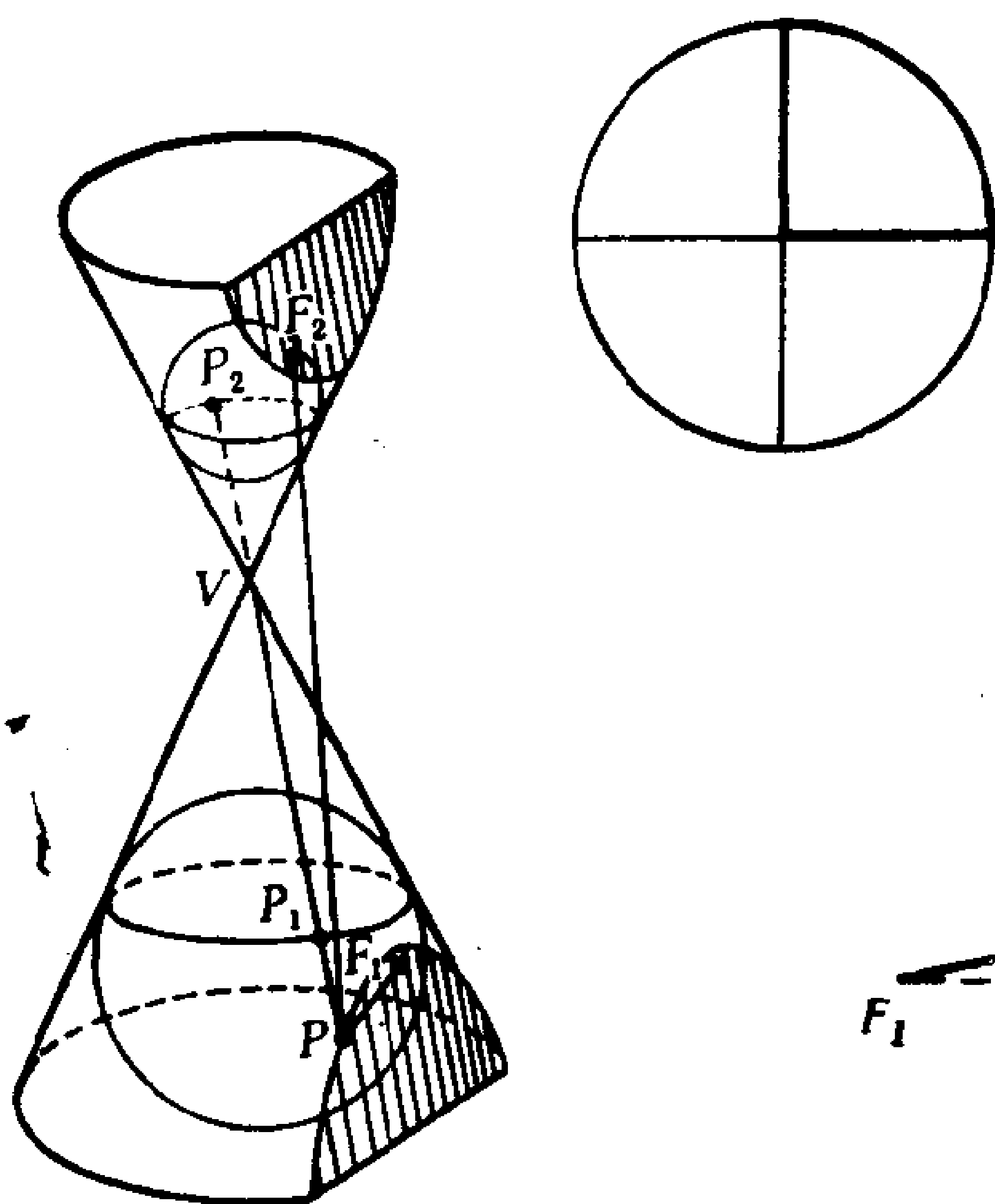


图 4.12

图 4.13

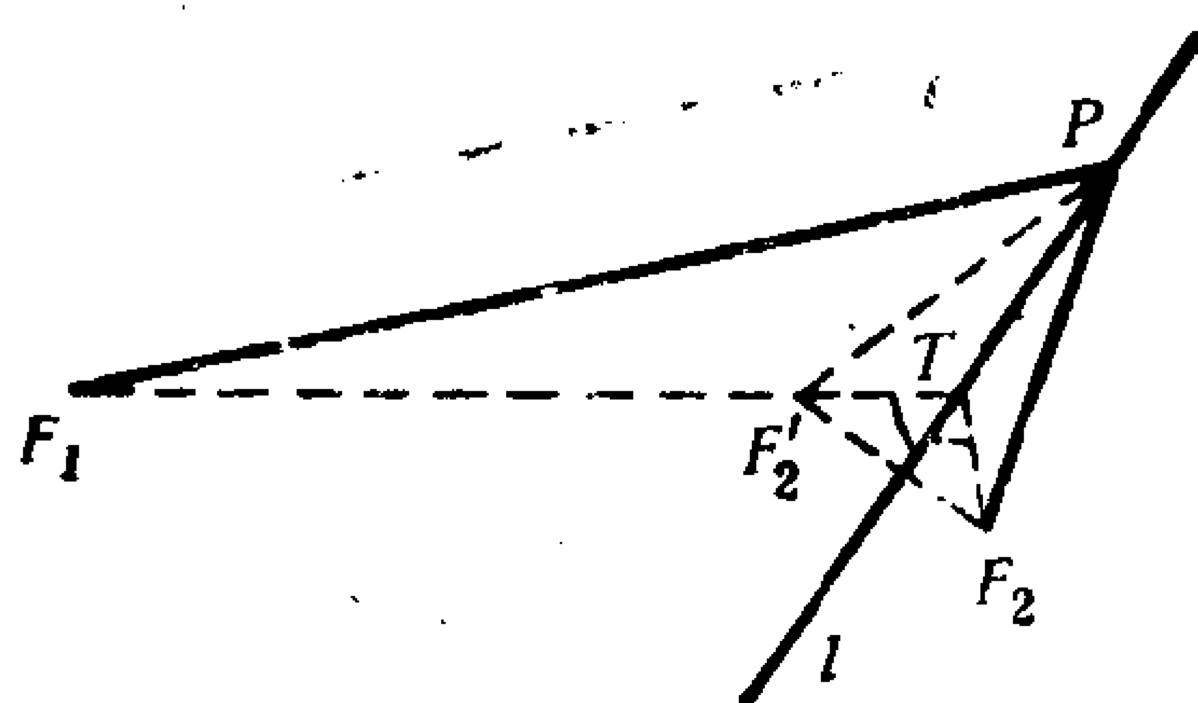


图 4 14

问题30. 在图4.15中，联结P到P的虚线段是桌上从P到P的一条路径的象。这条线段与矩形的边的交点就是台球在球桌边上被反射的点，或者是这种点的象。例如，$P\to w\to x\to y\to z\to P$就给出了一条这样的路径。为了找出从$P$到$Q$的一条可能的路径，只要把$P$和由反射得到的$Q$的任何一个象联结起来即可。

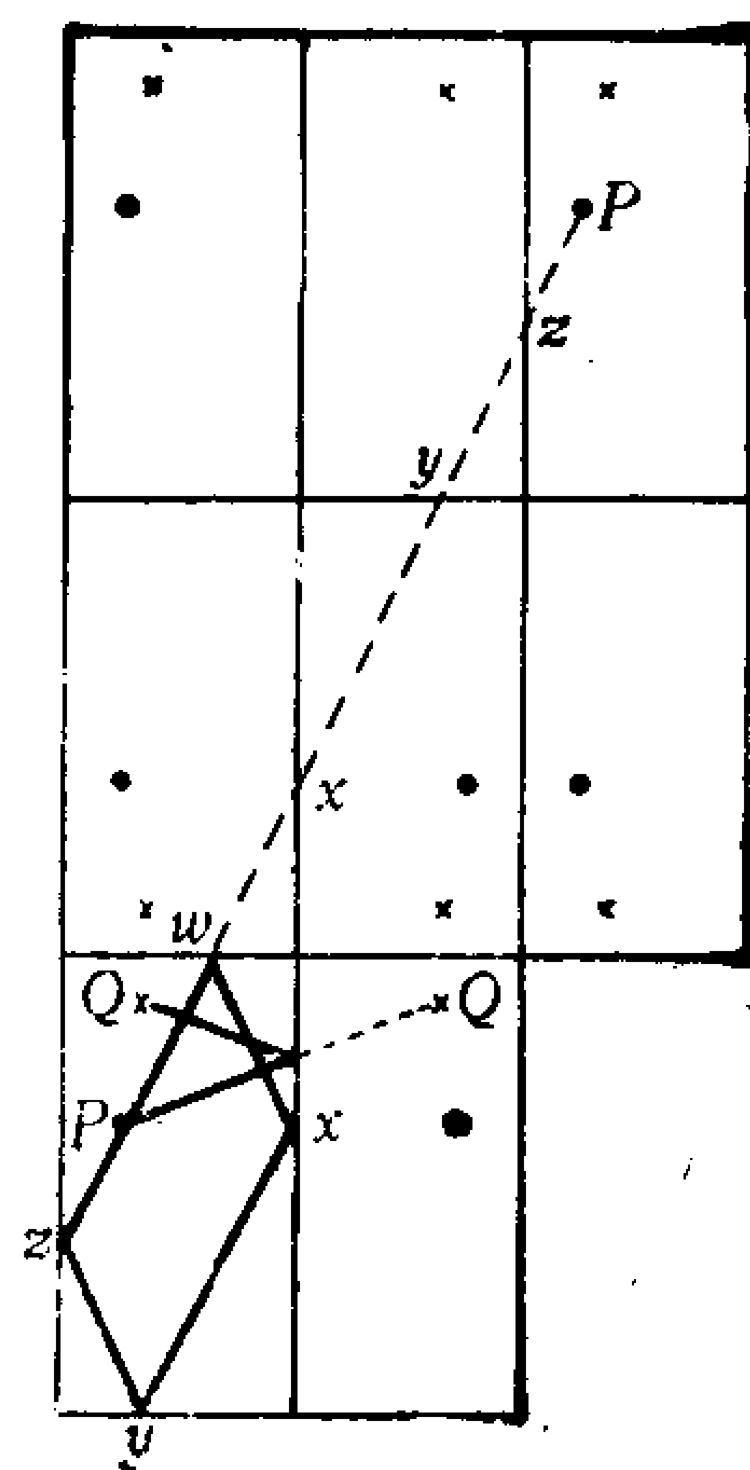


图 4.15

容易求得无穷多个解的台球桌的其它可能的形状是等边三角形和正六边形，还有别的形状吗？你能

用什么形状的完全一样的多边形砖无重迭地覆盖住整个平面?

问题31. 能够内接于一个给定的凸n边形的周长最小的n边形有以下性质：极小n边形的相邻两边与包含着它们的公共顶点的给定n边形的边夹等角。

问题32. 考虑图4.16．通过在三角形的每边上反射P而得的六边形$AP_1CP_2BP_3$有面积$2T$和周长$2(PA+PB+PC)$．从紧接着问题21的那个命题，我们有：在面积为$2T$的所有六边形中，正六边形有最小的周长．用L表示这个周长．则

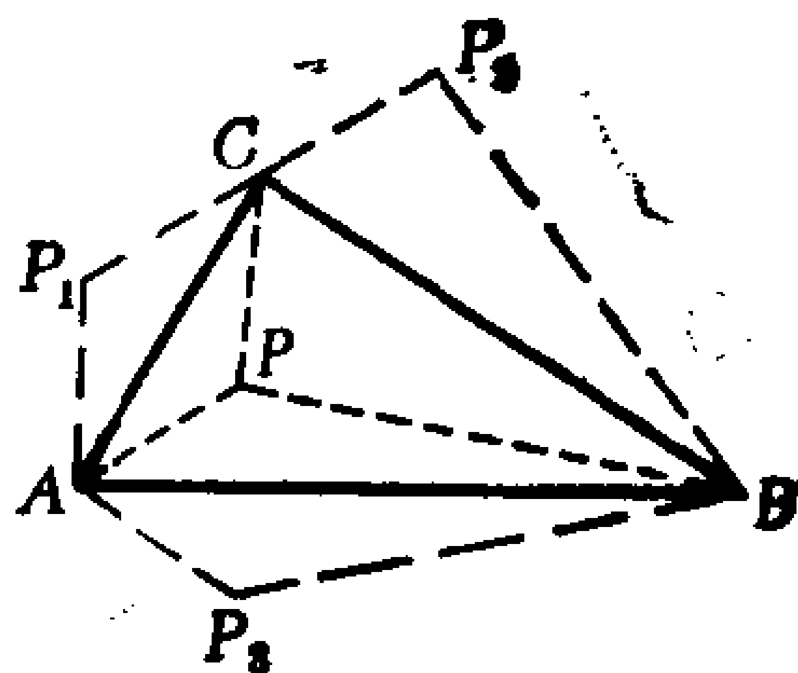


图 4.16

$$2(PA+PB+PC)\geqslant L.$$

借助正六边形的面积$2T$来计算它的周长L，有

$$L=4\sqrt{\sqrt{3}T}.$$

问题33. 在具有给定面积T的所有三角形中，等边三角形有最大的内切圆．用r_E表示它的半径；于是

$$r_E\geqslant r.$$

但用等边三角形的内切圆半径来表示它的面积的公式是

$$T=3\sqrt{3}r_E^2.$$

所以

$$PA+PB+PC\geqslant\sqrt{\sqrt{3}T}$$
$$=2\sqrt{\sqrt{3}\cdot 3\cdot\sqrt{3}r_E^2}=6r_E\geqslant 6r. \ \blacksquare$$

问题34. **定理** 设S是一个四面体，作三个三棱柱，它们有公共的侧棱，并以S的三个面作为它们的底面．这三

个棱柱或者都完全在S的外部，或者没有一个完全在S的外部。若在S的余下的一个面上作第四个三棱柱，它的侧棱是前三个棱柱的公共侧棱的平移，则前三个棱柱的体积之和必等于第四个棱柱的体积。

问题35. 利用提示和定理3得到不等式

$$aPA\cdot bPB\cdot cPC$$
$$\geqslant(cp_b+bp_c)(ap_c+cp_a)(bp_a+ap_b),$$

再应用定理8于右端的每一个因子。

问题36. 我们首先考虑一个特殊情形。

定理 设$ABCD$是各面面积都相等的一个四面体，又设P是它内部的一个点。则

$$PA+PB+PC+PD\geqslant3(p_a+p_b+p_c+p_d),$$

其中p_a,p_b,p_c,p_d是从P到各面的距离。当且仅当四面体是正四面体而且P是它的中心时，等式成立。

证明 设各面的面积全都是S。利用问题34的推广的帕普斯定理，我们能够用类似于证明三角形的厄尔多斯-莫德耳不等式的方法来证得

$$PA\cdot S\geqslant p_b\cdot S+p_c\cdot S+p_d\cdot S. \qquad (1)$$

注意在证明(1)时，我们并没有利用把四面体的一个顶点或一个面同任何其它的顶点或面区别开来的性质。所以，由于我们已能证明对顶点A的不等式(1)，所以也必然能够证明包含其它三个顶点的对应的不等式。一旦我们发觉不等式(1)的左端包含从P到顶点A的距离，而右端包含从P到A点处相交的三个面的距离，并且当弄清了我们记号①的涵义

① 在我们的记号中，我们只考虑四个字母a,b,c,d，并进行所有的循环排列；每一次我们都把第一个字母大写，以便区分出在每个不等式中所讨论的顶点。这样一来，我们考虑的是A,b,c,d；B,c,d,a；D,a,b,c。

之后，我们就能写下另外三个不等式：

$$PB\cdot S\geqslant p_c\cdot S+p_d\cdot S+p_a\cdot S, \qquad (2)$$

$$PC\cdot S\geqslant p_d\cdot S+p_a\cdot S+p_b\cdot S, \qquad (3)$$

$$PD\cdot S\geqslant p_a\cdot S+p_b\cdot S+p_c\cdot S. \qquad (4)$$

把以上四个不等式中的对应项相加，我们就得到了要求的不等式。▎

如果四面体是正四面体，而且P是它的外接球的中心，则

$$PA+PB+PC+PD=3(p_a+p_b+p_c+p_d).$$

然而，不等式

$$PA+PB+PC+PD\geqslant 3(p_a+p_b+p_c+p_d)$$

一般说来不成立，虽然它很象是厄尔多斯-莫德耳不等式的自然推广。特别地，它对于图 4.17 中表示的退化的四面体是不成立的。请找出一个非退化的四面体，使上式对于它也不成立。

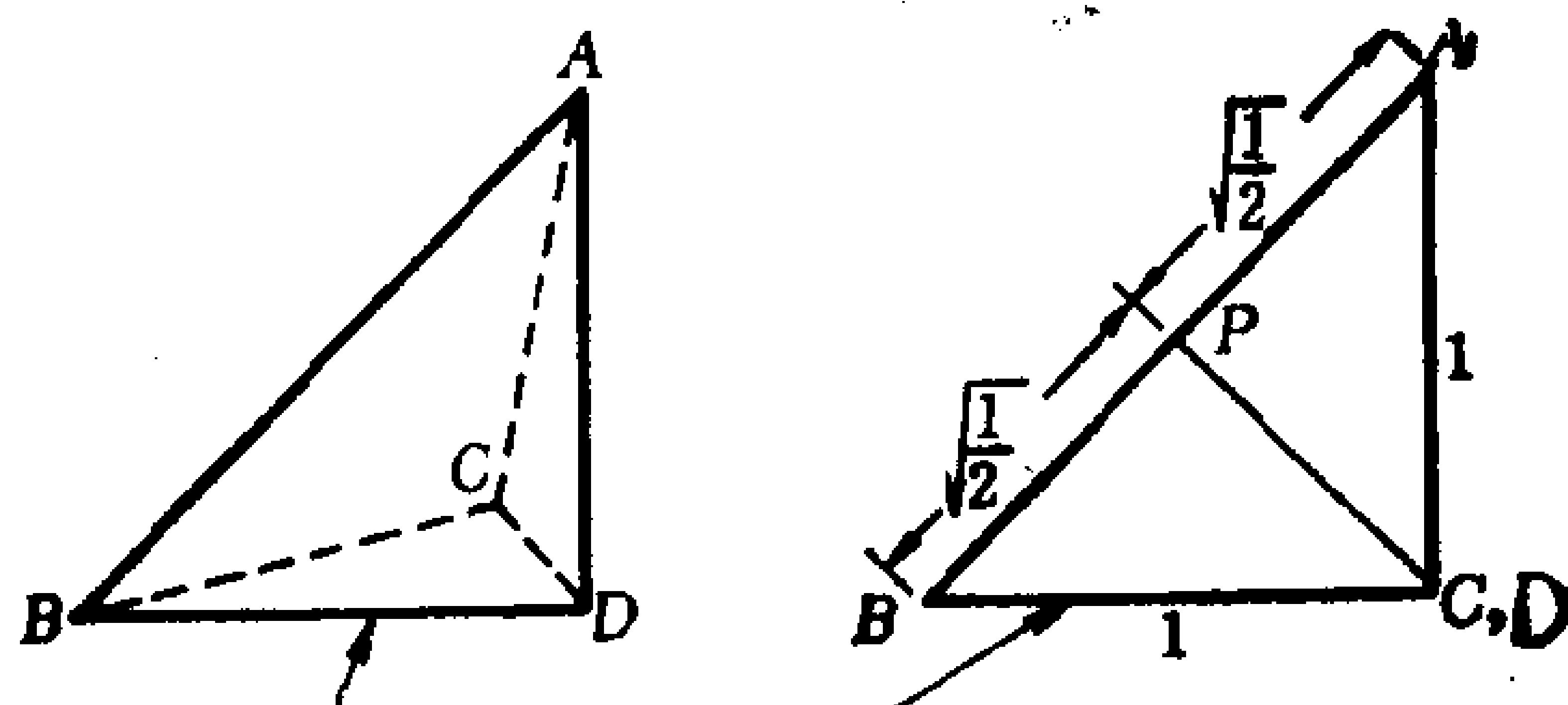


图 4.17

现在人们可能猜想

$$PA+PB+PC+PD>2\sqrt{2}\,(p_a+p_b+p_c+p_d).$$

对于所有的三直角四面体(三个面相互垂直)和所有的包含其

外接球中心的四面体，这个猜想已经被证实了。D·K·卡扎里诺夫有一个一般结果的证明，但是他拒绝公布它，或许是因为它太复杂了吧！你能找出一个证明来吗？

也可以考虑包含到棱和顶点的距离以及到棱和面的距离的不等式。你能作出猜测来吗？你能够证明一个定理吗？

问题37. 如果四边形是凸的，要求的点就是它的对角线的交点。这是直线距离是两点间最短距离这个事实的一个直接推论。如果 $ABCD$ 不是凸的，并且 D 位于 ABC 的内部，D 就是要求的点。

问题38. 解法1。设点 P 位于 ABC 内部，移动 P，使得 PC 是常数(见图4.18)。于是由反射原理，当 $\angle APC=\angle BPC$ 时，$PA+PB$ 最小。在这种情形下，镜面(它们是 P 点描出的圆的切线)在改变位置；对每一面镜子，P 都是切点，并在圆上正好有一点，使在该点相切的镜面，把从 A 发出的光线反射到 B (见图4.19)。无论最小点 P 相对 C 有什么性质，它相对 A 和 B 也必须有同样的性质。所以，我们得出结论：在到顶点 A，B 和 C 的距离之和最小的那个点 P 处，角 APC，BPC 和 APB 必须全相等。但是，仅当三角形没有一个角大于 $2\pi/3(120°)$ 时，这才是可能的。例如，如果 $\angle A>120°$，又若 $\angle APB=\angle APC=120°$，则三角形 PAB 和

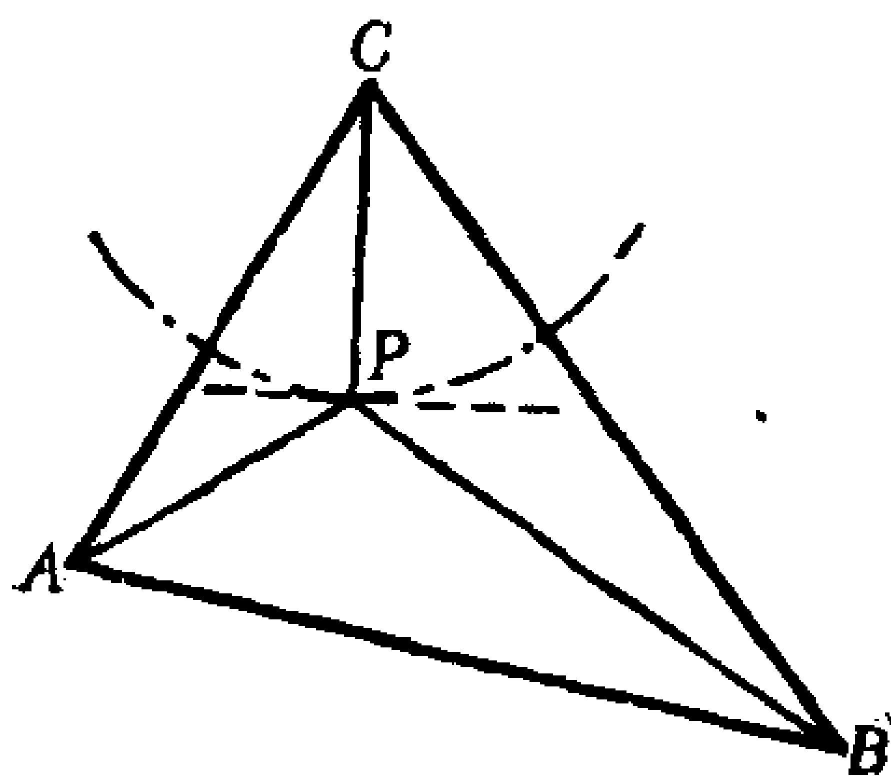


图 4.18

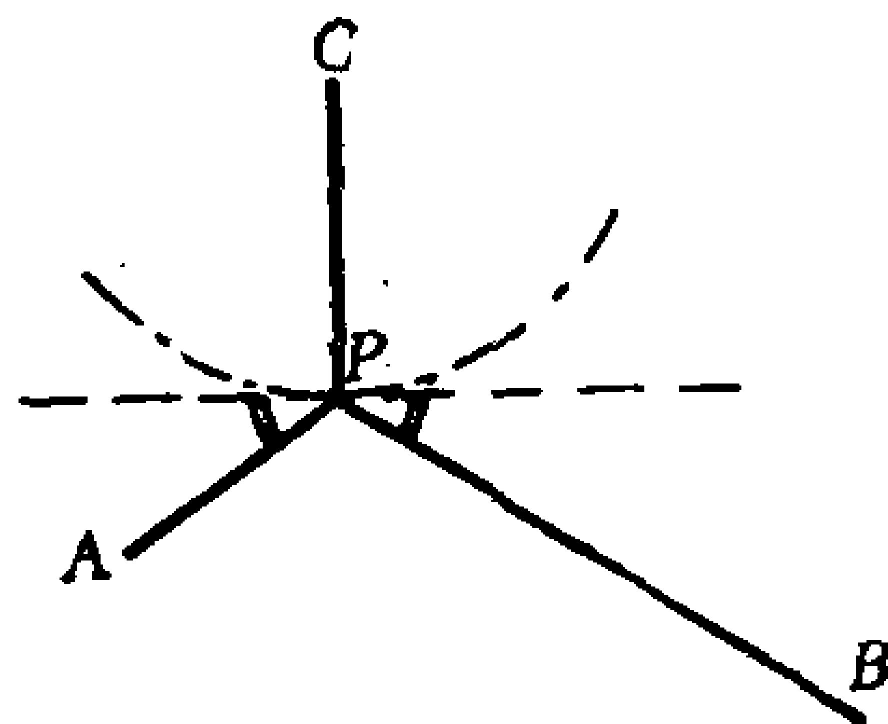


图 4.19

PAC之一必有内角和大于$\pi(180°)$，这是不可能的。可以证明：如果三角形的一个角至少是$2\pi/3$，则该角对应的顶点就是到三角形顶点距离之和最小的点。由于它不能在内部，因而最小点必位于三角形一条边上的某处；进一步，就能很容易地看出它必是最大角的顶点。

解法2. 设在水平桌面上开了三个洞A，B和C，又设有三个一公斤的重物，用穿过这些洞并在桌面之上点P处打上结的绳子把它们悬在桌下(见图4.20)。结的平衡点就是要求的点。这是因为，为了达到平衡，重物已下降到使它们的总势能最小，也就是说，使得和$AA'+BB'+CC'$达到最大值。但是

$$(A'A+AP)+(B'B+BP)+(C'C+CP)$$

是常数。所以，在平衡时$AP+BP+CP$最小。现在，三条绳上的力是相等的，仅当它们彼此成等角时三个相等的力才能平衡。因此，平衡时在打结处绳间的角必相等。

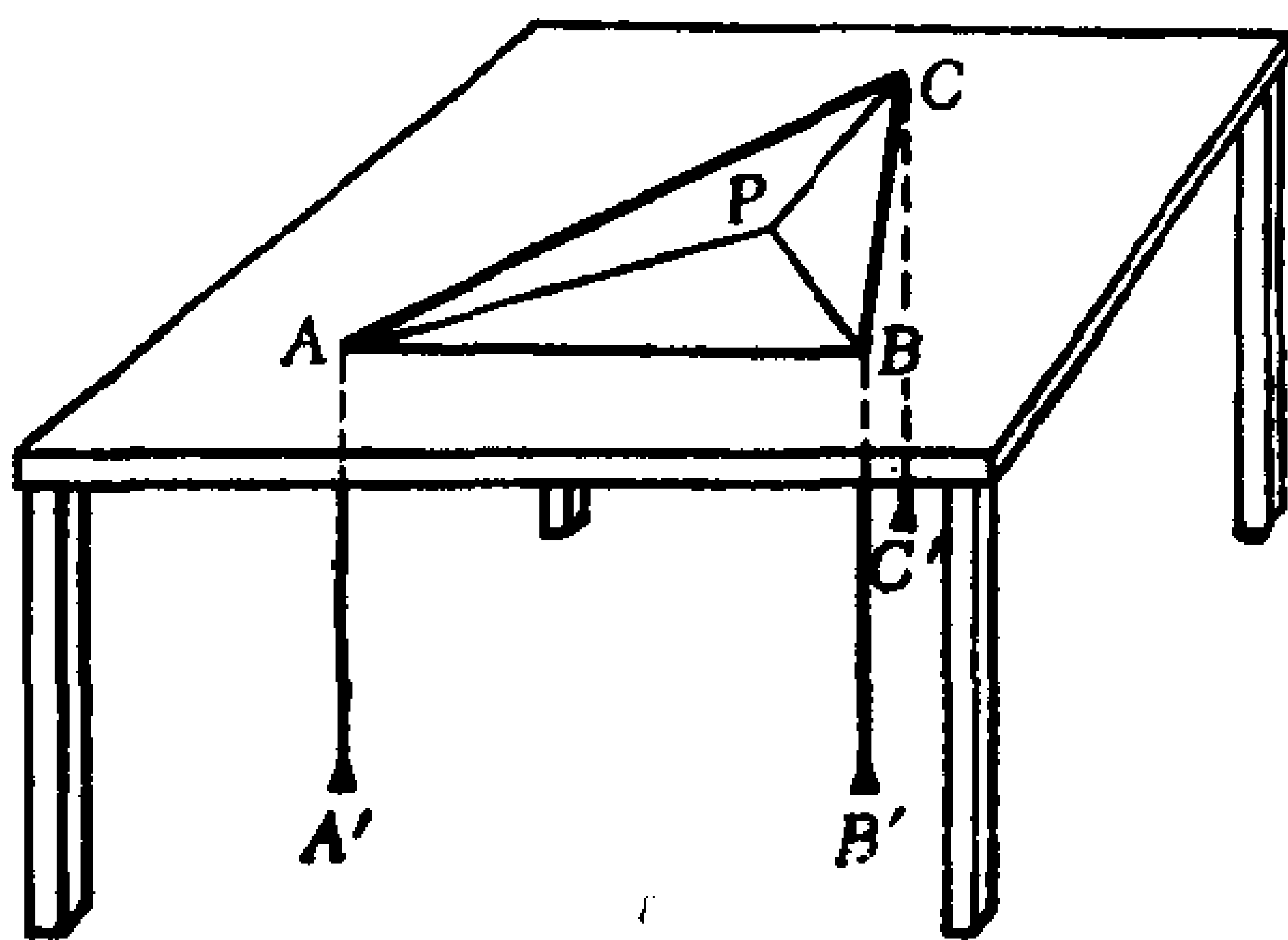


图 4.20

在拉德马赫尔与托普莱茨所著《趣味数学》①一书的第

① H. Rademacher and O, Toeplitz, The Enjoyment of Mathematics, Princeton University Press, 1957.

34页上，给出了这个问题的另一种漂亮的解法，还给出了对要求的点P的一种简单作图法。

问题39.[（由P・巴特费提出，G・卡尔曼解决）。点A处的所有可能的菱形都有一个顶点在$\angle A$的平分线上（见图4.21）。其中最大的一个在BC上有顶点。这样一来，只有三个菱形需要考虑。设三角形的面积是T，设菱形$ADEF$的面积是T_a，又设$AF=x$。则

$$T_a = T - [T(CDE) + T(BEF)];$$

又因两个相似三角形面积之比与一组对应边的长度平方之比相同，我们就有

$$T_a = T\left[1 - x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right].$$

但
$$\frac{b}{c} = \frac{b-x}{x};$$

因此，

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

所以

$$T_a = T\frac{2bc}{(b+c)^2}.$$

类似地，有

$$T_b = T\frac{2ac}{(a+c)^2} \quad 和 \quad T_c = T\frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

所以，现在

$$T_a - T_b = \frac{2cT}{(a+c)^2(b+c)^2}(a-b)(ab-c^2),$$

$$T_b - T_c = \frac{2aT}{(b+a)^2(c+a)^2}(b-c)(bc-a^2),$$

$$T_c - T_a = \frac{2bT}{(c+b)^2(a+b)^2}(c-a)(ca-b^2).$$

如果$a\leqslant b\leqslant c$，则$ac\leqslant b^2$；所以$T_a\geqslant T_b$。还有，$bc\geqslant a^2$；因此，$T_c\geqslant T_b$。这样一来，T_a，T_b和T_c中的最大者或者是T_a或者是T_c。T_c大于、等于或小于T_a，取决于$ac>b^2$，$ac=b^2$或$ac<b^2$。▎

这个问题的提出者和上述解答的作者都是匈牙利的中学生。

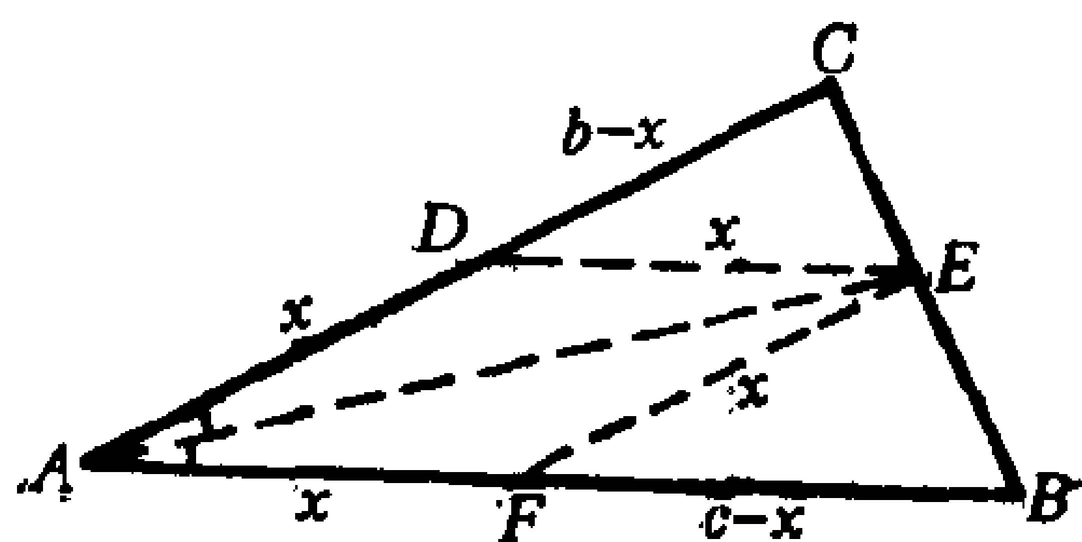


图 4.21

问题40. 按余弦定理，

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - ab\cos C,$$

$$s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab\cos C.$$

所以

$$s_a^2 - s_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$$

（见图4.22）。由假设$b>a$，从而$s_a^2>s_b^2$或$s_a>s_b$。类似地，有$s_b>s_c$。

我们现在考虑角平分线（见图4.23）。先延长BA边到点E，使得$AE=b$。然后画出线段EC，并注意EC平行于AD。由于$\triangle EBC$与$\triangle ABD$相似，因而

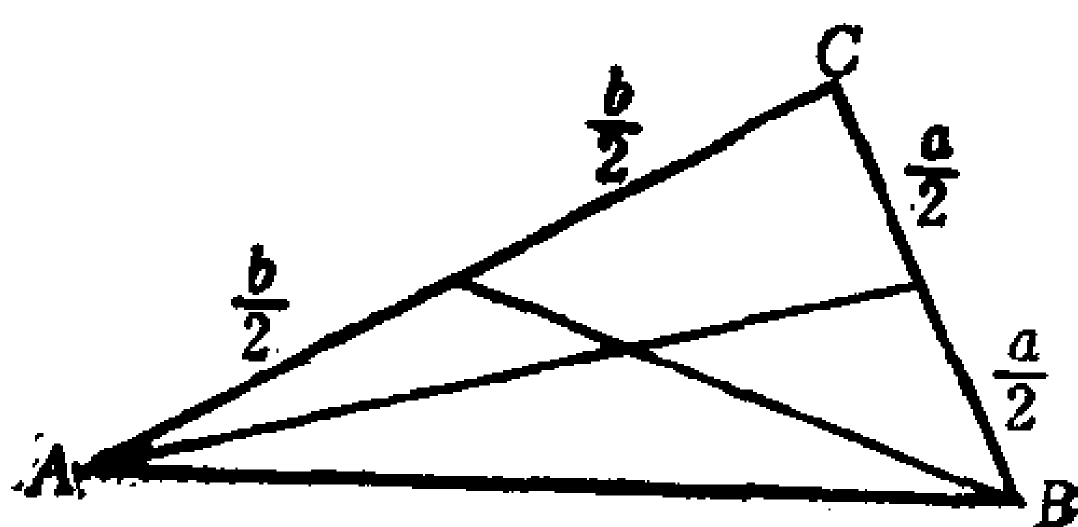


图 4.22

$$\frac{2b\cos\frac{1}{2}A}{b+c} = \frac{f_a}{c}.$$

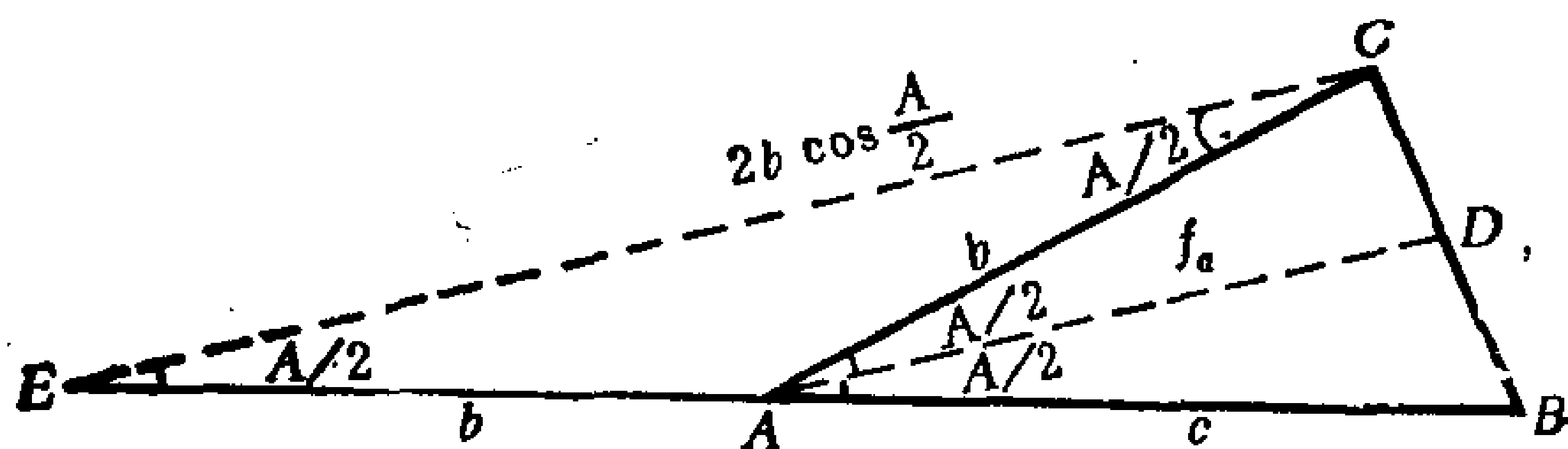


图 4.23

所以，

$$f_a=\frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{b+c},$$

类似地，有

$$f_b=\frac{2ca\cos\frac{1}{2}B}{c+a}.$$

于是

$$f_a-f_b=\frac{2c\left[b(c+a)\cos\frac{1}{2}A-a(b+c)\cos\frac{1}{2}B\right]}{(b+c)(c+a)}.$$

很清楚，f_a-f_b的符号由分子中方括号里的量的符号来决定。由于假设$a<b$，因此有$\angle A<\angle B$和$\cos A/2>\cos B/2$。由于$bc>ac$，故还有$b(c+a)>a(b+c)$。所以$f_a>f_b$。类似地，有$f_b>f_c$。 ∎

问题41. 解法 1　假设AB是最长边；也就是说，$c>a$，$c>b$。设PH和CH'是三角形APB和ABC的高，考虑相似三角形$PC'H$和$CC'H$。则有

$$\frac{PC'}{CC'}=\frac{PH}{CH'}.$$

此外，由于三角形PAB与ABC有相同的底边，所以高PH和CH'的长度之比与它们的面积之比相等。于是

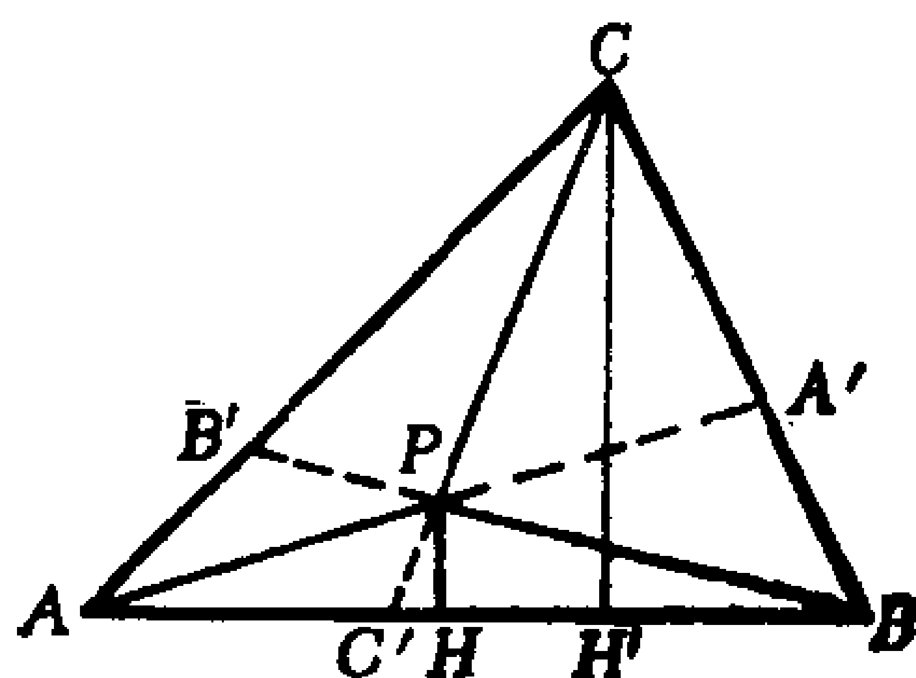


图 4.24

$$\frac{PH}{CH'}=\frac{PC'}{CC'}=\frac{T(PAB)}{T(ABC)}.$$

又因AB是$\triangle ABC$的最长边，因而$CC'<c$。这样一来

$$\frac{PC'}{c}<\frac{T(PAB)}{T(ABC)}.$$

类似地，

$$\frac{PA'}{c}<\frac{T(PBC)}{T(ABC)} \quad 和 \quad \frac{PB'}{c}<\frac{T(PCA)}{T(ABC)}.$$

因此，

$$PA'+PB'+PC'<\frac{c[T(PAB)+T(PBC)+T(PCA)]}{T(ABC)}$$

或

$$PA'+PB'+PC'<\frac{cT(ABC)}{T(ABC)}=c. \quad \blacksquare$$

解法 2　**提示**　过P点作直线$A''B''$, $B'''C''$和$A'''C'''$分别平行于边AB, BC和AC（见图 4.25）。考虑三角形$PA''C''$, $PA'''B'''$和$PC''B''$。证明$PA'+PB'+PC'$小于这三个三角形的最长边之和，而且这个和就是$\triangle ABC$的最长边的长度。

问题 40 和 41 是匈牙利的中学生和在匈牙利上学的保尔·厄尔多斯提出来的。

问题43.　考虑图 4.26。面积最小的三角形以H作为它底边的中点。

证明　把这个三角形叫做CDE（见图4.26）。设ABC是任一其它的允许三角形，并且假设我们已经选定了各点的名称，使D位于A与C之间。作DF平行于CE，交AB于F。

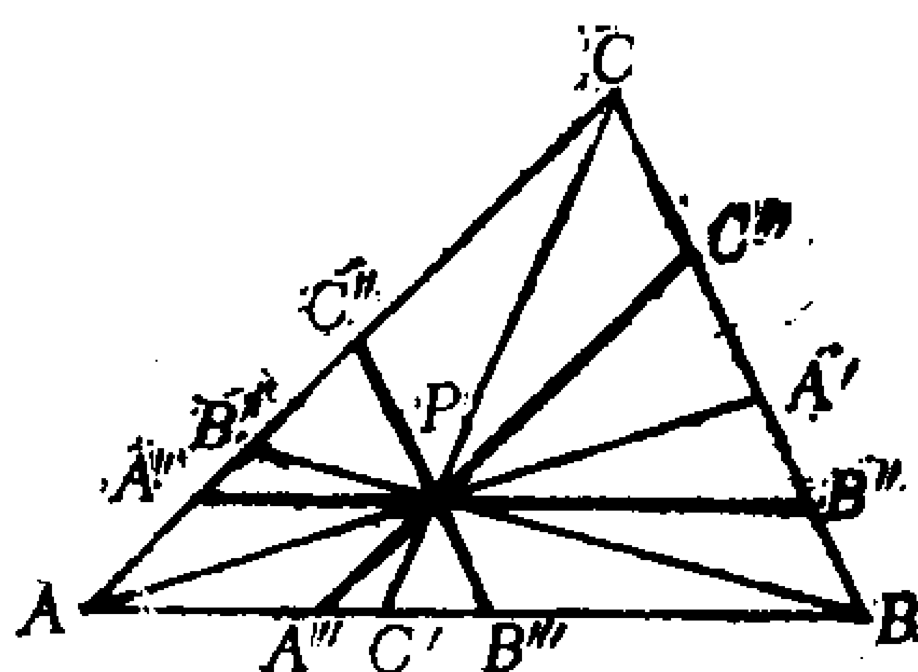


图　4.25

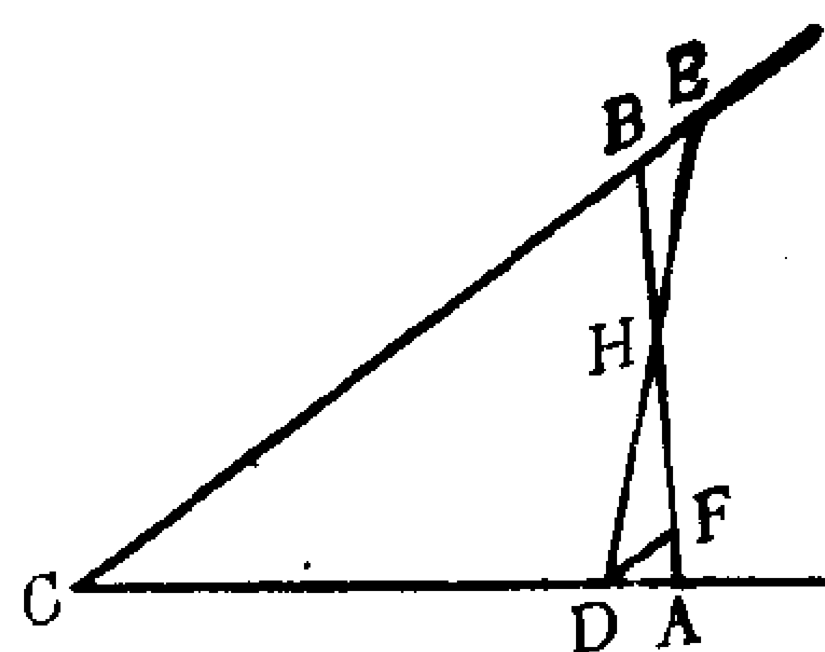


图　4.26

则三角形DFH与BEH全等。所以

$$T(CAB)=T(CDE)+T(DAF)$$

或

$$T(CAB)>T(CDE)。\blacksquare$$

问题44.　**提示**　切点必位于AB和CD之间的一半处。

设EF是切点在AB和CD之间一半处的一条切线。设$E'F'$是任一其它的切线，又设$E'F'$与EF相交于X（见图4.27）。如果X到AB比到CD近，则$T(EXE')<T(FXF')$。然而，对于象图4.28表明的那种情形，就必须多说一些话才行

问题45.　假设球有单位半径。显然$S_2=\pi$和$S_3=2\pi$。为

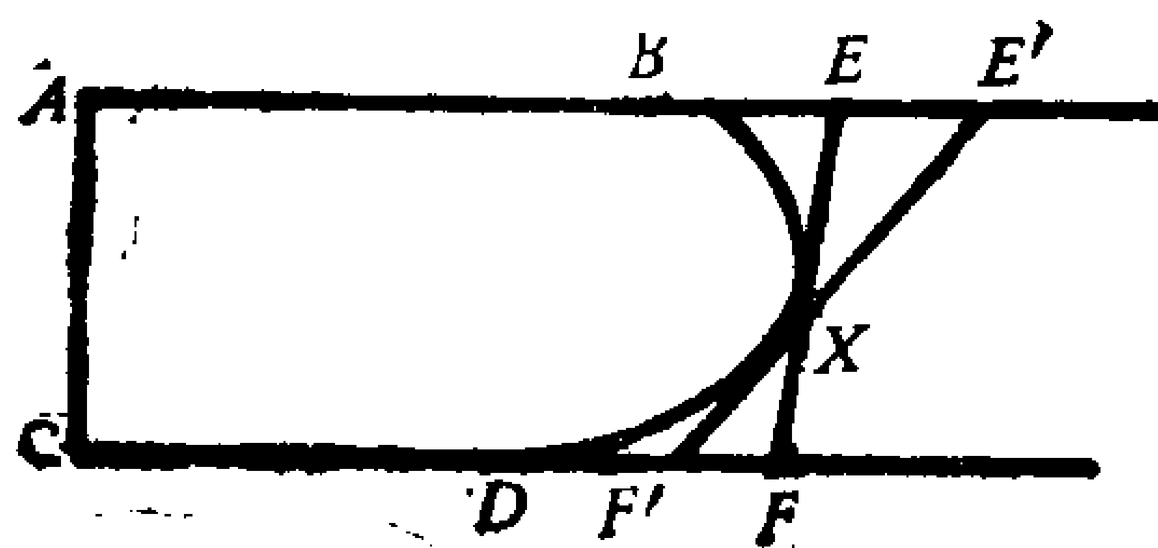


图　4.27

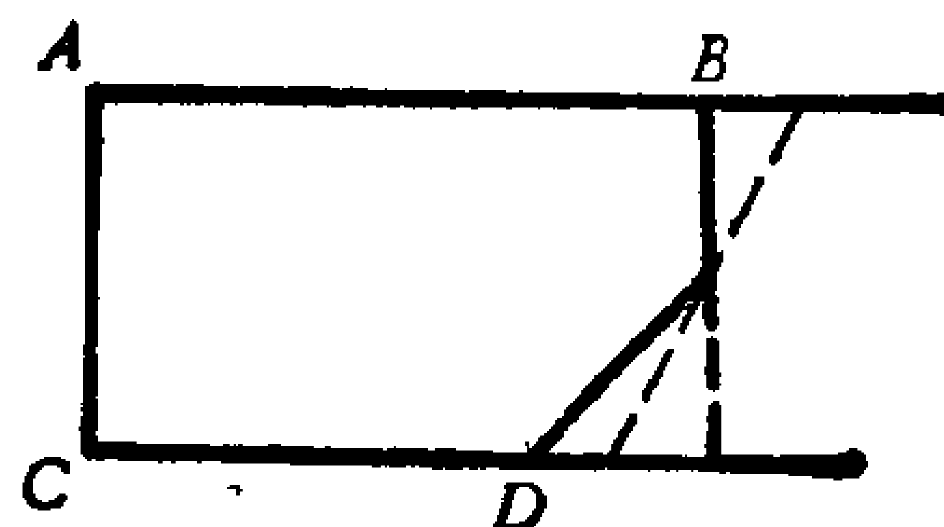


图　4.28

求S_4，把四个点称为1,2,3,4。考虑这些点的四种可能的三重数组。很清楚，对每个三重数组，和S小于或等于S_3，也就是说，

$$S(1,2,3)\leqslant S_3,\quad S(2,3,4)\leqslant S_3,$$
$$S(1,2,4)\leqslant S_3,\quad S(1,3,4)\leqslant S_3.$$

但是

$$S(1,2,3)+S(2,3,4)+S(1,2,4)+S(1,3,4)$$
$$=2S(1,2,3,4).$$

所以

$$2S_4\leqslant 4S_3$$

或

$$S_4\leqslant 2S_3=4\pi.$$

当且仅当四个给定点的四个三重数组的每一个都处于极端位置时，也就是说，当且仅当四个点关于球的中心对称时，等式才成立。例如，它们可以是成对地位于两条直径的两端。

一般地，可猜测

$$S_{2k}=\pi k^2 \quad 和 \quad S_{2k+1}=\pi k(k+1),$$

这是由于S的这些值是尽可能地把$2k$或$2k+1$个点成对地摆在球的直径的两端，或是以某种别的对称形式分布而得到的。因为把点按某种方式布置可取到S的这些值，所以，我们知道

$$S_n\geqslant\frac{\pi}{4}n^2 \quad 或 \quad \frac{S_n}{n^2}\geqslant\frac{\pi}{4}.$$

重复从S_3得到S_4的推导，我们可建立用S_{n-1}表出S_n的公式。我们发现，由于在n个点中每次取$n-1$个，共有n种不同的组合，因此

$$(n-2)S_n \leqslant nS_{n-1} \quad 或 \quad S_n \leqslant \frac{n}{n-2}S_{n-1}.$$

例如，

$$S_5 \leqslant \frac{20}{3}\pi.$$

所以

$$S_n \leqslant \frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}S_{n-2} \leqslant \frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n-2}{n-4}S_{n-3} \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 5}{(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 3}S_4$$

或

$$S_n \leqslant \frac{n(n-1)}{3}\cdot\pi.$$

从而，

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{S_n}{n^2} \leqslant \frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad (n=4,5,6,\cdots). ①$$

问题46. 平分三角形的面积的最短弦是一个等腰三角形的底边，它的顶点是给定三角形中对应最小角的顶点。最长弦以这个顶点作为一个端点。

首先我们来证明提示中提出的定理。

设△（三角形ABC）和△′（三角形$A'B'C'$）是面积相等

---

① 关于S_n的这个估计和上面指出的$S_{2k+1}=\pi k(k+1)$的猜测是矛盾的。事实上，由于

$$S_{2k+1}=\pi k(k+1)=\frac{\pi}{4}\left[(2k+1)^2-1\right],$$

不难得出

$$\frac{S_{2k+1}}{(2k+1)^2}=\frac{\pi}{4}\left[1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right]<\frac{\pi}{4}, \quad k=1,2,3,\cdots.$$

所以，最后的不等式的左端对大于3的奇数可能不成立。——译者

但边长不等的给定三角形，比如说$a>b$，$a'>b'$。由于按假设有$\angle ACB=\angle A'C'B'$，我们可简单地把这两个角都记为C。假设$\triangle$是在C处相交的二边长度之差较小的三角形，即，

$$a-b<a'-b'. \quad (1)$$

只需表明$c<c'$就完成了我们的证明。

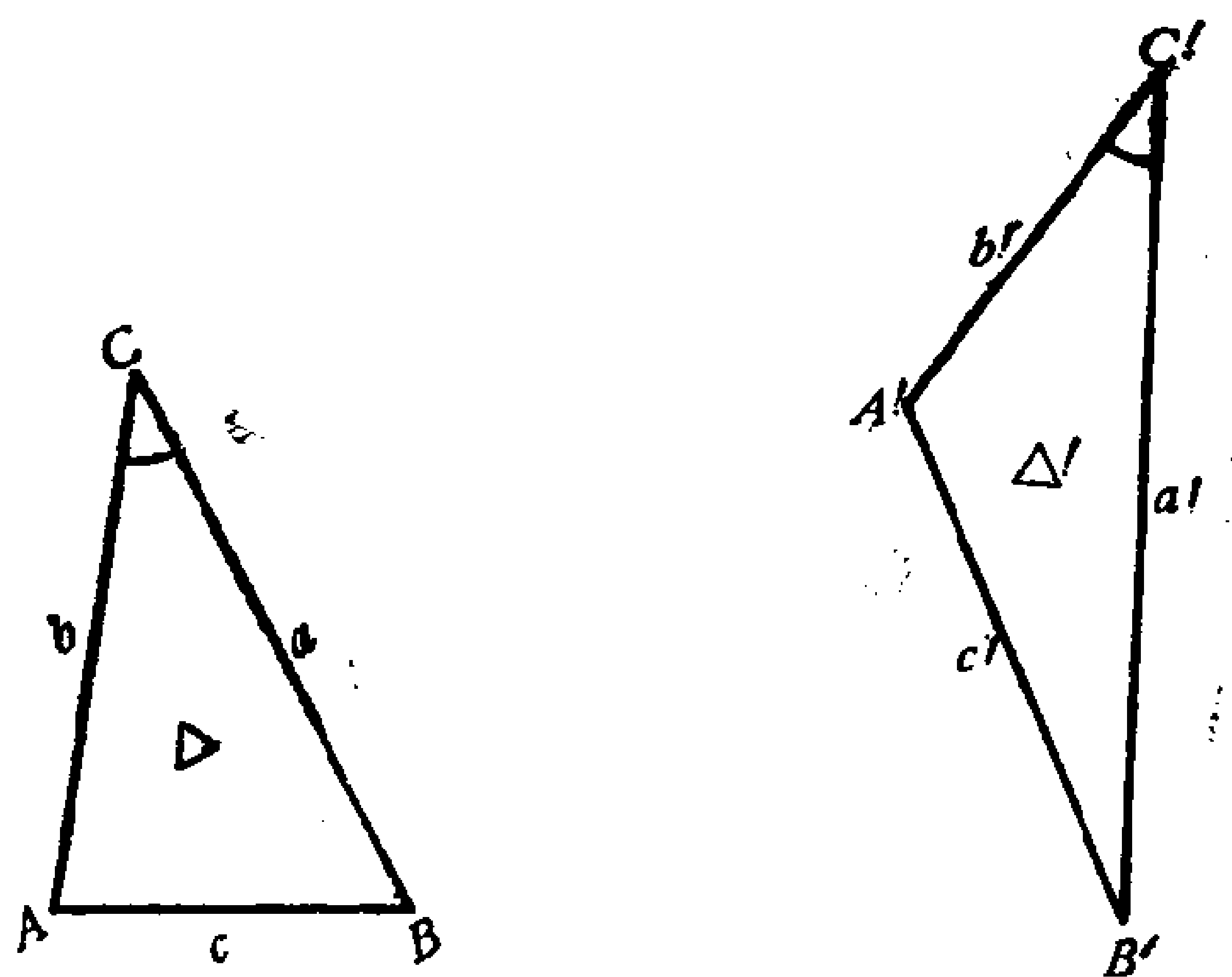


图 4.29

现在注意到

$$2T(\triangle)=ab\sin C=2T(\triangle')=a'b'\sin C,$$

所以

$$ab=a'b'. \quad (2)$$

从(1)推出

$$(a-b)^2<(a'-b')^2$$

或
$$a^2-2ab+b^2<a'^2-2a'b'+b'^2.$$

由于(2)，如果我们在后一不等式两端加上$2ab$，它就变成

$$a^2+b^2<a'^2+b'^2. \quad (3)$$

我们希望证明

$$c=AB<c'=A'B'.$$

按余弦定理，

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad 和 \quad c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos C.$$

从而，由于 (2)，

$$c'^2 - c^2 = a'^2 + b'^2 - (a^2 + b^2).$$

从不等式 (3) 推出后一表达式是正的。所以

$$c'^2 > c^2;$$

因此，和我们想要证的一样，$c' > c$。▌

现在我们能够着手来讨论原来的问题了。刚才证明的定理告诉我们，最短的面积平分弦是以下三条横截线中最短的那一条：它们是等腰三角形的底边，见图4.30(a)。用a'，b'和c'表示它们的底边的长度，其中长度为a'的底边位于A的对面，等等。然而，有可能这三个三角形不全存在；例如，图4.30(b)中的三角形，它就没有以A为顶点的等腰三角形的底边构成的面积平分弦。

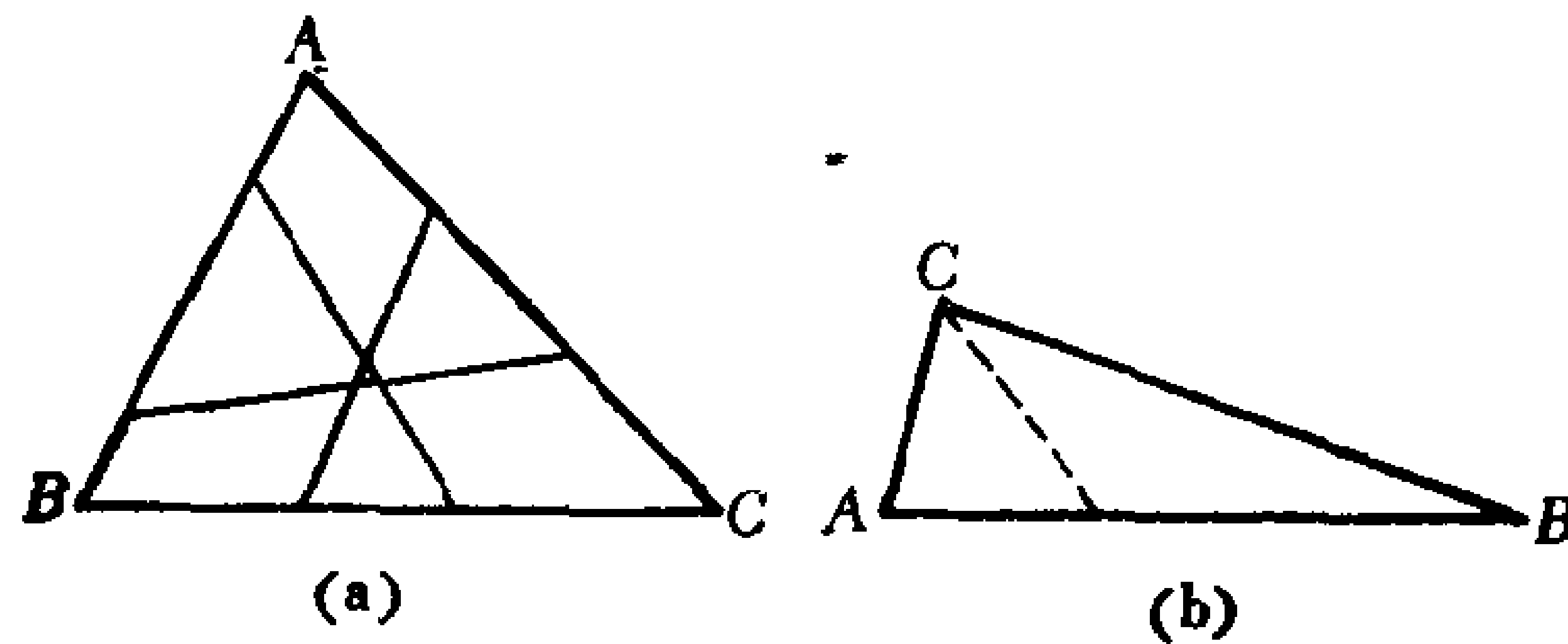


图 4.30

下述事实是真的：如果$\angle C$是$\triangle ABC$的最小角，那么以C为顶点，面积为$T/2$的等腰三角形确实存在。（我们将称它为$\triangle$。）等一会我们要证明上一提法。首先，假设底边长度为c'的要求的等腰三角形存在，我们注意，即使其它的这种等腰三角形不存在，c'也必然比任何其它的面积平分弦要小。证明如下：平分$\triangle ABC$的面积为$T/2$的三个可能的等腰

三角形的面积分别是

$$\frac{1}{4}a'^2\text{ctg}\,\frac{1}{2}A,\qquad \frac{1}{4}b'^2\text{ctg}\,\frac{1}{2}B,$$

$$\frac{1}{4}c'^2\text{ctg}\,\frac{1}{2}C.$$

如果$a\geqslant b\geqslant c$，则$\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$，以及

$$\text{ctg}\frac{1}{2}A\leqslant\text{ctg}\frac{1}{2}B\leqslant\text{ctg}\frac{1}{2}C.$$

以上的三个面积相等意味着

$$a'\geqslant b'\geqslant c'.$$

现在，比如说：如果以A为顶点，面积是$T/2$的等腰三角形不在$\triangle ABC$内部，则按上述定理，以A为顶点的所有面积是$T/2$的允许三角形的底边都比a'长，因而也比c'长。

剩下的是证明c'存在，即以最小角C的顶点为一个顶点，底边是一条面积平分弦的等腰三角形事实上总是存在的。设x是以C为顶点，面积是$T/2$的等腰三角形$\triangle$的腰长。如果能够证明$x\leqslant b$，则$\triangle$正是我们想要建立的等腰三角形。这确实是对的，因为从不等式$b\leqslant a$可推出不等式$x\leqslant a$，以及$\triangle$的底边显然应与边AC与BC相交。

为证$x\leqslant b$，注意

$$\frac{1}{2}T=\frac{1}{4}ab\sin C\quad 和\quad \frac{1}{2}T=\frac{1}{2}x^2\sin C,$$

于是

$$x^2=\frac{1}{2}ab.$$

由三角不等式，

$$a<b+c,$$

又由假设，$c\leqslant b$。所以$a<2b$；因此，

$$x^2<\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot b=b^2 \quad 或 \quad x<b.$$

证完。当然，对满足$c=b\leqslant a$的等腰三角形，“最短”的面积平分截线是不唯一的，而对于等边三角形，就有三条这样的截线。

其次，我们可以问：哪一条是最长的面积平分弦？用来回答“最短截线问题”的同一个定理表明，一个三角形的最长的面积平分弦必有一个端点是三角形的一个顶点。由此可知这条弦是三角形的一条中线。在三种可能性中，经过简单(未必是短)的计算能够说明：最长的中线是终点在最短边上的那一条中线。**提示** 设ABC是$a\geqslant b\geqslant c$的任一三角形。设AA'，BB'和CC'是面积平分弦。证明

$$4AA'^2=2c^2+2b^2-a^2$$

和

$$4CC'^2=2b^2+2a^2-c^2;$$

所以

$$4(CC'^2-AA'^2)=3(a^2-c^2)\geqslant 0,$$

由此推出不等式

$$CC'\geqslant AA'.$$

类似可证$CC'\geqslant BB'$.

问题47. 最短弦是以给定三角形最小角的顶点为顶点的等腰三角形的底边；最长弦以这个顶点为一个端点。

提示 首先证明：

定理 在满足$\angle ACB=\angle A'C'B'$，并且两边长度之和相等，即

$$a+b=a'+b'$$

的两个三角形ABC与$A'B'C'$中，两边长度之差较小的三角

形的底边较短。

证明 采用与问题46的解答中同样的记号；我们已知

$$a+b=a'+b', \qquad (1)$$

$$a-b<a'-b', \qquad (2)$$

希望证明

$$c'>c.$$

现在条件(1)等价于等式

$$a'^2+b'^2-(a^2+b^2)=2(ab-a'b'),$$

按余弦定理，我们要求的结果$c'>c$等价于不等式

$$2(a'b'-ab)\cos C<a'^2+b'^2-(a^2+b^2). \qquad (3)$$

所以，只要证明

$$2(a'b'-ab)\cos C<2(ab-a'b')=-2(a'b'-ab)$$

或等价地，

$$(a'b'-ab)[1+\cos C]<0$$

就够了。把(1)和(2)的左、右两端平方并相减就能推出不等式

$$a'b'-ab<0,$$

而不等式$1+\cos C>0$等价于$\angle C\neq\pi$，如果我们约定有一个三角形，这显然是完全必要的。因此，(3)确实是正确的，于是$c'>c$。▎

定 理 索 引